# $p$-median 問題における最近隣施設選択仮定の緩和

01205430　筑波大学　*鈴木 勉　SUZUKI Tsutomu
University of Alberta　HODGSON, M. J.
02004830　筑波大学　大山 崇　OHYAMA Takashi

## 1．はじめに

施設配置モデルにおける利用者の施設への配分に関しては，最も近い施設に帰属させるという「最近隣施設選択」を仮定することが多かった．しかしこの仮定は，施設の魅力度や開設時間等のサービス内容の差違，病院と調剤薬局のように通常周遊して訪問する等の理由からしばしば成立しない．本論文では，利用者が2番目に近い施設を利用したり，周遊距離が最小になる2施設を同時利用したりする場合の施設配置問題を定式化し，そうした仮定緩和が最適解に与える影響を明らかにすることを目的とする．

## 2．モデルの定式化

基本とするモデルは以下の(P1)$p$-median モデルである．

$$\min_{X_{ij}} \quad Z=\sum_i\sum_j w_i d_{ij} X_{ij}, \tag{1}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_j X_{ij}=1, \quad \forall i, \tag{2}$$

$$X_{ij} \le X_{jj}, \quad \forall i,j, \tag{3}$$

$$\sum_j X_{jj}=p \tag{4}$$

$X_{ij}\in\{0,1\}$：ノード $i$ における需要の候補地 $j$ への配分

$w_i$：ノード $i$ における需要

$d_{ij}$：ノード $i$ から $j$ までの距離 $(d_{ij}=d_{ji}\ge 0, d_{ii}=0)$

$p$：施設数

ここで，ノード $i$ の需要が唯一（最近隣）の施設に配分されることを表す制約式(2)を緩和し，図1(b)のように第2近隣施設も利用するように以下の式で置き換える．

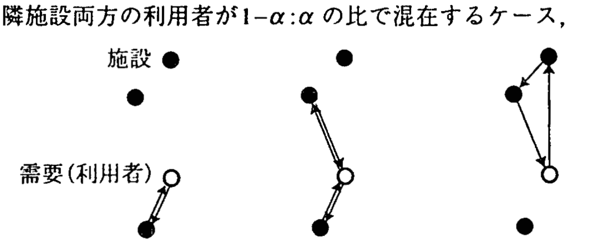
$$\sum_j X_{ij}=2, \quad \forall i \tag{5}$$

この問題を(P2) 2次 $p$-median モデルと呼ぶ．次に，利用者が2施設を最小移動距離で周遊するように選択する場合（図1(c)）を考える．この場合，必ずしも最近隣施設と第2近隣施設が選択されるとは限らないことに注意されたい．目的関数は式(1)に2施設間の距離を加えた，

$$\min_{X_{ij}} \quad Z=\sum_i\sum_j w_i d_{ij} X_{ij}+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\sum_l w_i d_{jl} X_{ij} X_{il} \tag{6}$$

となる．制約式は，(P2)と同様，(5)(3)(4)である．この(P3)周遊2次 $p$-median モデルは線形化可能（省略）である．

さらに，最近隣施設のみの利用者と最近隣施設と第2近隣施設両方の利用者が $1-\alpha:\alpha$ の比で混在するケース，




(a) 最近隣施設選択　(b) 最近隣及び第2近隣施設選択　(c) 周遊距離最小2施設選択

**図1．施設選択の類型**

最近隣施設のみの利用者と2施設を周遊する者とが同様に混在するケースを考える $(0\le\alpha\le 1)$．各々(P4)2次混合モデル，(P5) 周遊2次混合モデルと呼ぶ（定式化は省略）．

## 3．最適配置の計算例

東京都区部の町丁目代表点から24点を抽出し，Delaunay網を構成して得た図2のネットワークを対象に，距離を最短経路で与え，各町丁目の1995年夜間人口を需要として(P2)(P3)を解いた結果を図3に示す．但し，同一ノードへの2施設立地を許すためダミーノードを付加した．(P2)の解は，$p$ が偶数のとき施設ペアを形成し，その配置は施設数 $p/2$ 個の(P1)の配置と一致する．$p$ が奇数の場合は施設数 $\lfloor p/2 \rfloor$ 個の(P1)の解と $\lfloor p/2 \rfloor+1$ 個の(P1)の解の重ね合わせになる（$\lfloor x \rfloor$ は $x$ を超えない最大の整数）．これは，図4の1次元連続モデルで示すように，最近隣施設までの距離と第2近隣施設までの距離の総和が，1つおきの施設群（図4では1-3-5と2-4）までの距離の総和におよそ等しくなるため，(P2)の解が図5のようにそれらの施設群の(P1)解の重ね合わせになることで説明できる．これに対し，(P3)の解では，$p$ の偶数・奇数を問わず施設は全てペアを形成し，$\lfloor p/2 \rfloor$ 個の(P1)の解と同じ配置となる（奇数の場合に余る1施設の立地場所は任意）．これは周遊が施設間距離をより短くする方向に作用するためと考えられる．

図6は $\alpha$ を0.1刻みで変化させたときの(P4)(P5)の解である．$\alpha$ が大きくなるに連れ，(P1)の解を基点に2施設同士が近接し始め，最終的には(P2)(P3)の解と一致する．$\alpha$ が一般の値の場合は，必ずしもペアを形成しないが2施設ずつが近接した中間的配置となる．(P5)の方が(P4)に比べてペアを形成する $\alpha$ の遷移点が小さい理由は図7で説明できる．需要が一様に分布する連続平面に同一密度で施設を単独に三角格子点状に配置する単独配置パターン（施設間距離 $a$）と，施設ペアを三角格子点状に配置するペア配置パターン（同 $\sqrt{2}a$）で，最近隣施設までの距離を各々 $r_1, s_1$，第2近隣施設までの距離を $r_2, s_2$ とすれば，$E[r_1]\approx 0.351a$, $E[r_2]\approx 0.678a$, $E[s_1]=E[s_2]=\sqrt{2}E[r_1]\approx 0.496a$ となる．遷移点では各々 $E[(1-\alpha)r_1+\alpha(r_1+r_2)]=E[(1-\alpha)s_1+\alpha(s_1+s_2)]$ 及び $E[(1-\alpha)2r_1+\alpha(1+r_1+r_2)]=E[(1-\alpha)2s_1+\alpha(s_1+s_2)]$ が成り立つので，(P4)の遷移点は $\alpha\approx 0.800$，(P5)のそれは $\alpha\approx 0.219$ となることがわかる．周遊利用者の存在は2割程度でも立地に大きく影響を与えることがわかる．

## 4．おわりに

本論文では，最近隣施設選択仮定の緩和が施設クラスターの形成をもたらすこと，特に周遊利用者の存在は立地計画にとって重要であることを明らかにした．

有益なご示唆を戴いた東京大学杉原厚吉先生に感謝致します．なお，本研究は日本学術振興会特定国派遣研究者事業及び科学研究費補助金による成果の一部である．

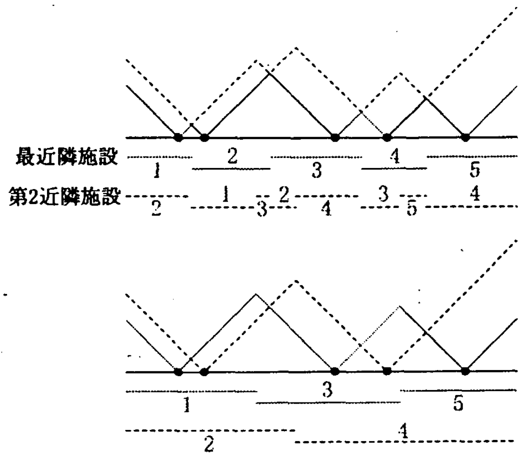



図4．線分上での(P2)の読み替え($p$=5)

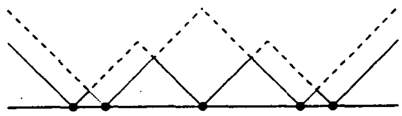


図5．線分上における(P2)の最適解($p$=5)

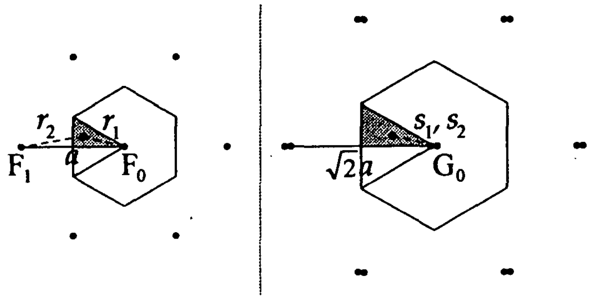



図7．連続平面上における三角格子点状の
単独配置とペア配置（同一施設密度）

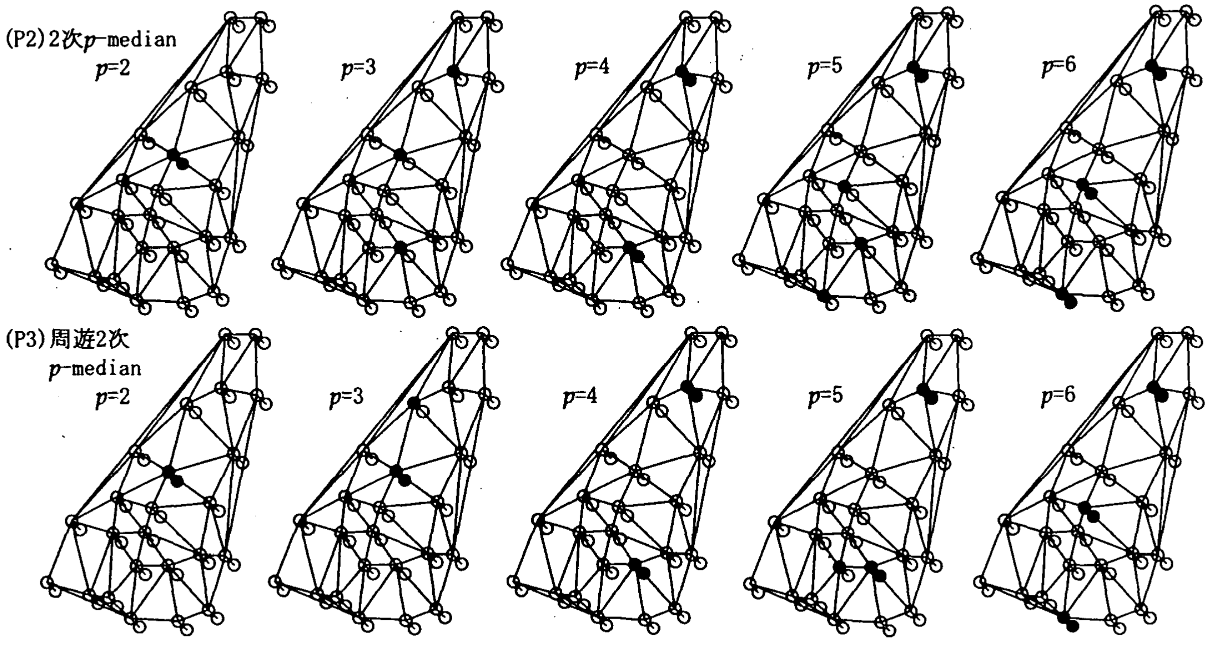



図3．(P2)2次$p$-medianモデル，(P3)周遊2次$p$-medianモデルの最適解

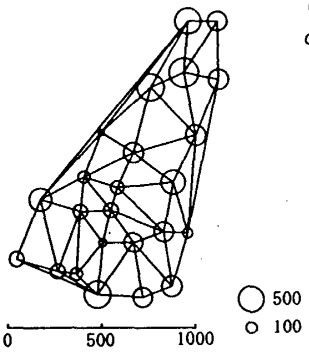



図2．対象ネットワークと
需要分布

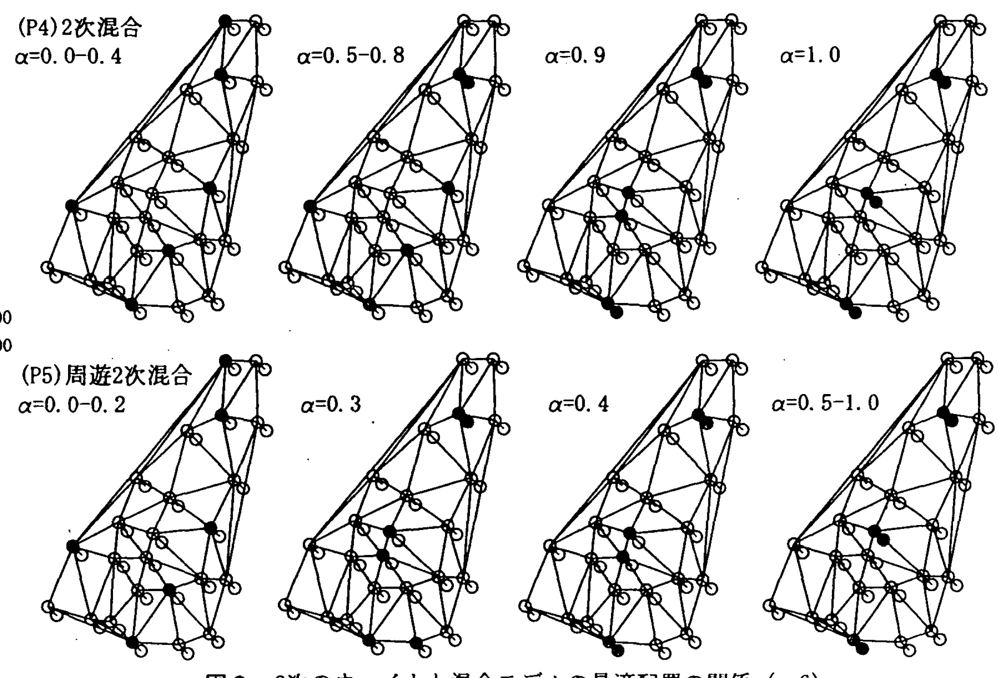



図6．2次のウェイトと混合モデルの最適配置の関係（$p$=6）