全部分ネットワークの信頼度計算アルゴリズム

01109114　流通科学大学　*小出 武　KOIDE Takeshi
01205144　鹿児島大学　新森 修一　SHINMORI Shuichi
01005195　大阪大学　石井 博昭　ISHII Hiroaki

1. はじめに

ネットワーク $G=(V,E)$ に対し，$G'=(V,E')$, $E'\subseteq E$ を G の部分ネットワークと定義する．本研究では G の全部分ネットワークの総合信頼度を効率的に計算するアルゴリズムを提案する．総合信頼度はネットワーク信頼度の一つで，ネットワークの連結性を測る指標として知られている．総合信頼度を計算する問題は#P 完全であるので，あるネットワークの総合信頼度を計算するには指数時間が必要であると考えられている．本研究では $2^{|E|}$ 個存在する部分ネットワークの信頼度を計算するとき，その過程で得た情報を効率的に利用することにより，計算時間の短縮を実現している．

2. 問題の定式化とネットワークの表現形

要素数 n の点集合 V，要素数 m の枝集合 E で構成されるネットワークを $G=(V,E)$ とする $(n\geq 2, m\geq 1)$．以下 $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ とする．G は連結で，自己閉路や平行枝を持たないとする．また点は常に正常であるが，枝 e_i は確率 $1-p_i$ で故障すると仮定する $(i=1,\ldots,m)$．確率 p_i を枝 e_i の枝確率と呼び，各枝の枝確率は互いに統計的に独立とする．このとき，G が有する全点が正常な枝で連結される確率を総合信頼度といい，$R(G)$ で表す．

$R(G)$ を計算するために以下の式がよく用いられる [1]．

$$R(G)=(1-p_i)R(G-e_i)+p_iR(G/e_i) \qquad (1)$$

ここで $R(G-e_i)$, $R(G/e_i)$ はそれぞれ G から e_i を除去，縮約したネットワークである．ネットワーク G に対して枝の除去，縮約を適用することにより構築されるネットワークを G のマイナーと呼ぶ．マイナーの総合信頼度が容易に計算できるまで式 (1) を再帰的に適用することによって対象のネットワークの総合信頼度を計算する方法を factoring 法と呼ぶ．図 1 に factoring 法の例を示す．以下 factoring 法において，枝のインデックスの小さい順に除去，縮約を行うものとする．

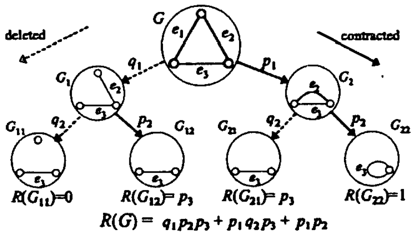

図 1: factoring 法

枝 e_i がある部分ネットワークに含まれるとき 1，含まれないとき 0 となる 0-1 変数を x_i とする $(i=1,\ldots,m)$．$\boldsymbol{x}=[x_1,\ldots,m]$, $E_{\boldsymbol{x}}=\{e_i|x_i=1, i=1,\ldots,m\}$ とすると，任意の部分ネットワーク $G_{\boldsymbol{x}}=(V,E_{\boldsymbol{x}})$ は $\boldsymbol{x}$ を適当に定めることにより表現できる．

$R(G_{\boldsymbol{x}})$ を factoring 法で計算する場合，その過程で様々なマイナーが構築される．いまある部分ネットワーク $G_{\boldsymbol{x}}$ の総合信頼度を計算する過程においてマイナー $G'_{\boldsymbol{x}}$ が構築された状態を考える．このとき枝 $e_i\in E$ と $G'_{\boldsymbol{x}}$ との関係は，以下の 4 つのうちのいずれかとなる．

(a)　$e_i\notin G_{\boldsymbol{x}}$（当然 $e_i\notin G'_{\boldsymbol{x}}$）
(b)　$e_i\in G'_{\boldsymbol{x}}$
(c)　$e_i\in G_{\boldsymbol{x}}$ だが除去されて $e_i\notin G'_{\boldsymbol{x}}$
(d)　$e_i\in G_{\boldsymbol{x}}$ だが縮約されて $e_i\notin G'_{\boldsymbol{x}}$

ここで $e\in G$ はネットワーク G が枝 e を有することを表す．これにともない上記 (a)～(d) の状態をとるとき，整数値 0,1,2,3 をとるように 0-1 変数 x_i を整数変数に拡張する．拡張された $\boldsymbol{x}$ を用いると，$G_{\boldsymbol{x}}$ で任意のマイナーを表現できる．

3. 同型ネットワークの信頼度の利用

以下 factoring 法を用いて $\boldsymbol{x}$ の辞書順に全部分ネットワークの信頼度を計算することを考える．図 2 にその計算の例を示したが，計算の過程で同型のネットワークの信頼度を計算することが確認できる．次に示す性質 1 はある種の同型ネットワークを検知するのに有効である．

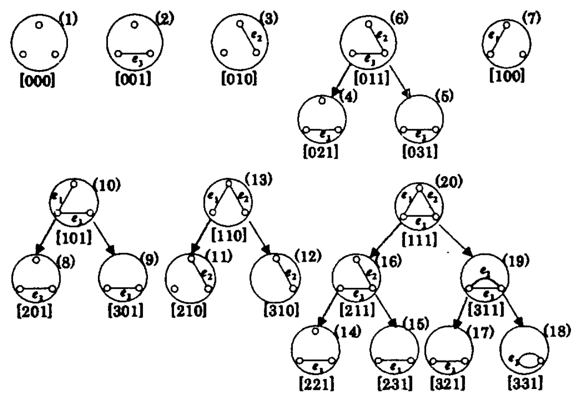

図 2: 全部分ネットワークの信頼度計算

性質 1 $\boldsymbol{x}=\{x_1,\ldots,x_m\}$ において $x_i=2$ とする．ここで次のように新しいベクトル $\boldsymbol{y}$ を定義する．

$$y_j=\begin{cases}0 & j=i\\ x_i & j\neq i.\end{cases}$$

このとき 2 つのネットワーク $G_{\boldsymbol{x}}$, $G_{\boldsymbol{y}}$ は同型である．

図2では，性質1によって (a) $G_{[001]}, G_{[021]}, G_{[201]}, G_{[221]}$ (b) $G_{[010]}, G_{[210]}$ (c) $G_{[011]}, G_{[211]}$ (d) $G_{[031]}, G_{[231]}$ (e) $G_{[301]}, G_{[321]}$ のそれぞれが同型であることが示される．ただし性質1によって全ての同型ネットワークが検知されるわけではない．上記の例でも (a)(d)(e) は同型であるが，性質1では検知できない．以降，性質1で検知できる同型を 02 同型と呼ぶ．同型なネットワークの信頼度は等しいので，適当なネットワークの信頼度を記憶し，後に 02 同型のネットワークが計算の対象となったときには，factoring 法を適用せずに記憶した信頼度を参照すれば，計算の手間を省くことができる．以下の定理はこの信頼度参照に関するものである．

定理 1 ある部分ネットワークに対し $k(=0,1,\ldots,m-1)$ 本の枝を縮約し，その後1本の枝を削除して構築されたマイナーを G' とすると，G' が信頼度計算の対象となる以前に，G' と 02 同型なネットワーク G_0 の信頼度を既に計算している．

定理1は，式 (1) の枝削除によって構築されたネットワークの信頼度がすでに計算済みであることを示している．次の定理は逆にどのネットワークの信頼度を記憶しておくべきかの基準を表す．

定理 2 $G_{\boldsymbol{x}}$ を計算の過程で構築されるネットワークとする．このとき，$R(G_{\boldsymbol{x}})$ が参照される回数は，次の条件を満足する x_i の個数に等しい．

- $x_i = 0$
- $x_j = 0$ または 3 $(j = 1, \ldots, i-1)$
- $x_j = 0$ または 1 $(j = i+1, \ldots, m)$

定理2によってどの信頼度が何回参照されるかを計算できるので，後に参照される信頼度のみ記憶すればよく，また必要回数参照された後には記憶を中止することにより，記憶領域を小さくすることが可能である．

4. アルゴリズム

以下にネットワーク $G = (V, E)$ の全部分ネットワークを計算するアルゴリズム CEM を示す．

```
Procedure CEM(G = (V, E))
    let x := [x_1, ..., x_m] where m = |E|,  M := φ;
    execute sub_cem(x, 1);
end.
Procedure sub_cem(x, i)
    if i > m then output FM(x);
    else
        x_i := 0,  execute sub_cem(x, i+1);
        x_i := 1,  execute sub_cem(x, i+1);
    end if;
end.
Procedure FM(x)
    if G_x is disconnected then return 0;
    if |E[G_x]| ≤ 1 then rel := R(G_x) by the factoring;
    else
        extract the minimum index edge e_i from E[G_x];
        search (x', R(G_x')) from M
                    where G_x' is 02-isomorphic to G_x − e_i;
        if R(G_x') is not found then R(G_x') := 0;
        if R(G_x') is no more searched then
            M := M − {(x', R(G_x'))};
        end if;
        x_i = 3;
        rel := (1 − p_i) × R(G_x') + p_i × FM(x);
        x_i = 1;
    end if;
    if R(G_x) is referred to later then
        M := M ∪ {(x, rel)};
    end if;
    return rel;
end.
```

定理 3 アルゴリズム CEM の空間量，時間量はそれぞれ $O((m-1)2^m)$, $O((m+2)2^m)$ である．

5. 数値実験

比較対象として2つのアルゴリズムを考える．1つは信頼度の参照を全く考えないアルゴリズムで SCEM と名付ける．もう一つは信頼度の参照をしないが，信頼度計算に今井ら [2] が提案した高速計算アルゴリズムを用いたアルゴリズムで BDD と名付ける．点数 $n = 10$，枝数 $m = 15, \ldots, 21$ であるネットワークを対象に3つのアルゴリズムを適用し，その実行時間を測定した．結果を表1に示す．

表 1: 実行時間の比較

n	m	SCEM (A) [s]	BDD (B) [s]	CEM$_1$ (C) [s]	A/C [%]	B/C [%]
10	15	0.66	0.46	0.14	21.2	30.4
	16	2.29	1.41	0.39	17.0	27.7
	17	8.45	4.30	1.05	12.4	24.4
	18	32.67	17.16	2.78	8.5	16.2
	19	118.04	49.17	7.30	6.2	14.8
	20	433.91	159.84	18.81	4.3	11.8
	21	1402.68	511.31	44.50	3.2	8.7

6. まとめ

本研究では全部分ネットワークの総合信頼度を計算する効率的なアルゴリズムを提案した．提案したアルゴリズムは容易に信頼度を考慮したネットワーク設計問題の完全列挙法に拡張できる．このアルゴリズムを基に，ネットワーク設計問題やその関連問題に対するアルゴリズムを開発したい．

参考文献

[1] C. J. Colbourn: *Combinatorics of Network Reliability* (Oxford University Press, 1987).

[2] H. Imai, K. Sekine and K. Imai: Computational investigations of all-terminal network reliability via BDDs. *IEICE Transactions on Fundamentals*, **E82-A(5)** (1999) 714-721.