2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

可能性情報下の土地開発問題

01991735 香川大学 郭沛俊 Peijun Guo

空く土地に現時点か或は将来ある時点で高層住宅を建てる問題を考える。

住宅の面積は q とし、建」設費用 C は q の関数で、以下の条件を満たす。

$$dC/dq>0 \tag{1}$$

$$d^2C/d^2q>0 \tag{2}$$

したがって、C は q に関して単調増加凸関数である。

高層住宅の単位面積の価格は p であって、地主のもらえる利潤は

$$r(p,q)=pq-C(q) \tag{3}$$

p は将来時点の価格ので、可能性変数として取扱う。価格の下界と上界をそれぞれ p_l と p_u とする。p の可能性分布

$$\pi_P:[p_l,p_u]\to[0,1] \tag{4}$$

は連続関数で、ある $p_c\in[p_l,p_u]$ が存在し、$\pi_P(p_c)=1$、$[p_l,p_c]$ で増加関数、$[p_c,p_u]$ で減少関数とする。

単位面積の価格が p であるとき、地主の最大利潤は

$$R(p)=\max_q r(p,q)=pq-C(q) \tag{5}$$

（5）を q で微分すると

$$dC(q)/dq=p \tag{6}$$

（6）の解は q^* とすると、

$$R(p)=\max_q r(q)=pq^*-C(q^*) \tag{7}$$

命題1． $R(p)$ は p の増加凸関数である。

命題2． 地主の利潤の範囲は $[0,R(p_u)]$ となる。

定義1. 効用関数 $U:[0,R(p_u)]\to[0,1]$ は連続単調増加関数で、以下の条件を満たす。

（1） $U(0)=0$ （8）

（2） $U(R(p_u))=1$ （9）

定義2． 地主は q 単位面積の住宅を作る楽観的な価値 $V_o(q)$ は以下のように定義する。

$$V_o(q)=\max_p \min(\pi_P(p),U(r(q,p))) \tag{10}$$

定義3． 地主は q 単位面積の住宅を作る悲観的な価値 $V_p(q)$ は以下のように定義する。

$$V_p(q)=\min_p \max(1-\pi_P(p),U(r(q,p))) \tag{11}$$

地主は楽観的な価値と悲観的な価値に基づき、以下の行動をとるべき

（1） 楽観的な価値を最大化するよう最適面積数 q_o^* を決める。すなわち、

$$q_o^*=\arg V_o(q) \tag{12}$$

（2） 悲観的な価値を最大化するよう最適面積数 q_p^* を決める。すなわち、

$$q_p^*=\arg V_p(q) \tag{13}$$

q_o^* と q_p^* はそれぞれ楽観的最適面積と悲観的面積と呼ぶ。

定理1． q_o^* は以下の方程式の解となる。

$$u(\hat{p}q-C(q))=\pi_P(\hat{p}) \tag{14}$$

$$dC(q)/dq=\hat{p} \tag{15}$$

ここで $\hat{p}$ は $\pi_P(p)$ と $u(r(p,q^*))$ の右側の交点の横座標である。

定理2． q_p^* は以下の方程式の解となる。

$$u(\hat{p}q-C(q))=1-\pi(\hat{p}) \tag{16}$$

$$dC(q)/dq=\hat{p} \tag{17}$$

ここで $\hat{p}$ は $1-\pi_P(p)$ と $u(r(p,q^*))$ の左側の交点の横座標である。

定理３．悲観的最適面積は楽観的最適面積より小さい、すなわち$q_p^* < q_o^*$。

定義３．二つの可能性分布π_A、π_Bは与えられて、任意のxに対し、$\pi_A(x) \geq \pi_B(x)$が成立つならば、可能性分布π_Aは可能性分布π_Bより大きいと呼ぶ。$\pi_A \geq \pi_B$で表す。

定理４．$\pi_A \geq \pi_B$なら$q_{pA}^* \leq q_{pB}^*$と$q_{oA}^* \leq q_{oB}^*$となる。

命題３．
将来時点で住宅の価格の可能性分布を$\pi_p(p)$として、面積qの住宅を建てると得られた利潤の可能性分布は以下のようになる

$$\pi_R(r) = \pi_p\left(\frac{r + C(q)}{q}\right) \tag{18}$$

現在住宅の価格がp_oとして、地主現時点で確実にもらえる利潤は

$$R(p_o) = \max_q r(p_o) = p_o q^* - C(q^*) \tag{19}$$

金利をθとすると、将来時点での価値は

$$R_f(\theta, p_o) = R(p_0)(1+\theta) = (1+\theta)\max_q r(p_o) = (1+\theta)(p_o q^* - C(q^*)) \tag{20}$$

土地開発の意思決定ルール
最大利潤の可能性分布$\pi_R(r)$に基づく、将来時点での利潤はR_fより大きいの可能性測度は閾値γより大きければ、住宅を建てる、そうでなければ、住宅を建てない。すなわち、$Pos(r \geq R_f) \geq \gamma$が成立つなら、住宅を建てる。

定理５．将来時点の価格に関する不確実性が増えれば、楽観的な態度を持つ地主は延期投資の傾向があり、悲観的な態度を持つ地主は早期投資の傾向がある。

参考文献

1. Dubois, D. and Prade, H., Possibility Theory, Plenum Press, New York, 1988.
2. Guo,P. and Chen, F., The possibilistic approach to the newsboy problem, The First International Conference on Electronic Business, Dec. 19-21,2001, Hong Kong (Accepted).
3. Tanaka,H. and Guo, P., Possibilistic Data Analysis for Operations Research (Heidelberg; New York; Physica-Verlag, Feb., 1999).
4. S. Titman, Urban land prices under uncertainty, The American Economic Review 75 (1985) 505-514.