1－A－8

2003年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

M凸劣モジュラ流問題に対する容量スケーリングアルゴリズム

02602360 東京工業大学 * 森口 聡子 MORIGUCHI Satoko
01603194 東京大学 室田 一雄 MUROTA Kazuo

1 はじめに

M凸関数は，整数格子点上で定義された関数のクラスとして，離散凸解析 [5, 7] において中心的な役割を担っている．M凸劣モジュラ流問題 [6] は，効率良く解くことができる組合せ最適化問題の最も一般的な枠組みの一つであり，その特殊ケースとして最小費用流問題や劣モジュラ流問題を含む．M凸劣モジュラ流問題に対する最初の多項式時間算法は，共役スケーリング法 [3] である．本稿では，M凸劣モジュラ流問題に対する最短路繰返し法を提案し，劣モジュラ流問題に対する容量スケーリング法 [2] に基づいて，スケーリングについて閉じたM凸劣モジュラ流問題に対する効率的な算法を提案する．

2 M凸関数とスケーリング

V を有限集合とする．関数 $f:\mathbb{Z}^V \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ がM凸関数であるとは，f が交換公理 (M-EXC) を満たすことである．

(M-EXC) $\forall x, y \in \mathrm{dom}\, f$, $\forall u \in \mathrm{supp}^+(x-y)$, $\exists v \in \mathrm{supp}^-(x-y)$ such that
$f(x)+f(y) \geq f(x-\chi_u+\chi_v)+f(y+\chi_u-\chi_v)$.

ここで，$\mathrm{dom}\, f = \{x \in \mathbb{Z}^V \mid f(x) < +\infty\}$,

$\mathrm{supp}^+(x-y) = \{w \in V \mid x(w) > y(w)\}$,

$\mathrm{supp}^-(x-y) = \{w \in V \mid x(w) < y(w)\}$

であり，$\chi_w \in \{0,1\}^V$ は $w \in V$ の特性ベクトルとする．

正の整数 α に対して，$f^\alpha:\mathbb{Z}^V \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ を

$$f^\alpha(x) = f(\alpha x) \qquad (x \in \mathbb{Z}^V)$$

と定義する．この操作をスケーリングと呼ぶ．一般に f がM凸関数であっても f^α はM凸関数とは限らない．しかし，分離凸関数や2次のM凸関数，層凸関数などのクラスのM凸関数はスケーリングについて閉じている [4, 7].

$x_\alpha \in \mathrm{dom}\, f$ に対し，$f(x_\alpha) \leq f(x_\alpha + \alpha(\chi_v - \chi_u))$ $(\forall u, v \in V)$ が成り立つとき，x_α を f の α 局所最小解と呼ぶ．次の定理は，α 局所最小解の近傍にM凸関数の最小解が存在することを示している．

定理 2.1 (森口・室田・塩浦 [4]) α を任意の正の整数とする．$x_\alpha \in \mathrm{dom}\, f$ は $f(x_\alpha) \leq f(x_\alpha + \alpha(\chi_v - \chi_u))$ $(\forall u, v \in V)$ を満たすとする．このとき，$\arg\min f \neq \emptyset$ であり，$|x_\alpha(v) - x_*(v)| \leq (n-1)(\alpha-1)$ $(v \in V)$ を満たす $x_* \in \arg\min f$ が存在する．

3 M凸劣モジュラ流問題

有向グラフ $G=(V,A)$ を考える．各枝の流量の下限と上限 $\underline{c}, \overline{c} \in \mathbb{Z}^A$ および，単位流量あたりの費用 $\gamma \in \mathbb{R}^A$ が与えられているとする．容量の上下限制約を満たし与えられた供給量と整合的なフロー $\xi \in \mathbb{Z}^A$ の中で総費用を最小にするものを求める問題である最小費用流問題は，供給制約をフローの境界 $\partial\xi$ がある基多面体に属すべきであるという制約に置き換えた劣モジュラ流問題に一般化される．劣モジュラ流問題はポテンシャル (双対変数) よる最適性規準，負閉路による最適性規準，最適解の整数性，効率的なアルゴリズムの存在などの良い性質をもっており，扱いやすい組合せ最適化問題の代表となっている [1].

さらに，$\partial\xi$ に対するコスト関数 $f:\mathbb{Z}^V \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ を目的関数に加えるという一般化を考えるとき，f がM凸関数ならば良い性質が保たれる．M凸関数 f によって以下のように定義される問題を整数値フローのM凸劣モジュラ流問題と呼ぶ [6].

M凸劣モジュラ流問題 MSFP

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & \Gamma_2(\xi) = \sum_{a \in A} \gamma(a)\xi(a) + f(\partial\xi) & (1) \\ \text{subject to} & \underline{c}(a) \leq \xi(a) \leq \overline{c}(a) \quad (a \in A), & (2) \\ & \partial\xi \in \mathrm{dom}\, f, & (3) \\ & \xi(a) \in \mathbb{Z} \quad (a \in A). & (4) \end{array}$$

4 アルゴリズム

フロー ξ と基 $x \in \mathrm{dom}\, f$ に対して補助グラフ $G_{\xi,x} = (V, A_{\xi,x}) = (V, A_\xi \cup B_\xi \cup C_x)$ を定義する．ただし，

$A_\xi = \{a \mid a \in A, \xi(a) < \overline{c}(a)\}$,

$B_\xi = \{\overline{a} \mid a \in A, \underline{c}(a) < \xi(a)\}$ ($\overline{a}$: a の逆向き),

$C_x = \{(u,v) \mid u, v \in V, u \neq v,$
$\exists\alpha > 0 : x - \alpha(\chi_u - \chi_v) \in \mathrm{dom}\, f\}$.

$G_{\xi,x}$ の枝容量 $c \in \mathbf{Z}^{A_{\xi,x}}$, 枝長 $l \in \mathbf{R}^{A_{\xi,x}}$ をそれぞれ,

$$c(a) = \begin{cases} \bar{c}(a) - \xi(a) & (a \in A_\xi) \\ \xi(\bar{a}) - \underline{c}(\bar{a}) & (a \in B_\xi, \bar{a} \in A) \\ \tilde{c}(x,v,u) & (a = (u,v) \in C_x), \end{cases}$$

$$l(a) = \begin{cases} \gamma(a) & (a \in A_\xi) \\ -\gamma(\bar{a}) & (a \in B_\xi, \bar{a} \in A) \\ f(x - \chi_u + \chi_v) - f(x) & (a = (u,v) \in C_x) \end{cases}$$

とする. ただし, $\tilde{c}(x,v,u) = \max\{\alpha \mid \alpha \in \mathbf{Z}, x - \alpha(\chi_u - \chi_v) \in \mathrm{dom}\, f\}$. ポテンシャル $p \in \mathbf{R}^V$ が与えられたとき, p に関する簡約費用を $l_p(a) = l(a) + p(\partial^+ a) - p(\partial^- a)$ と定義する.

定理 **4.1** [[6]] MSFPにおいて (2),(3) を満たすフロー $\xi \in \mathbf{Z}^A$ が最適流であるための必要十分条件は, $x = \partial\xi$ で, 任意の $a \in A_{\xi,x}$ に対して $l_p(a) \geq 0$ を満たすポテンシャル $p \in \mathbf{R}^V$ が存在することである.

$$S^+ = \{v \mid x(v) > \partial\xi(v)\}, S^- = \{v \mid x(v) < \partial\xi(v)\}$$

とする. 定理 4.1 から以下の算法が得られる.

Algorithm：最短路繰返し法

S0: (2) を満たすフロー $\xi \in \mathbf{Z}^A$ と $x \in \arg\min f$ を見出す. $p := 0$ とおく.

S1: $S^+ = \emptyset$ となるまで (1-1)-(1-3) を繰り返す.

1-1: $G_{\xi,x}$ における S^+ から各点 $v \in V \setminus S^+$ への l_p に関する最短路距離 $d(v)$ を計算する. S^+ から S^- への枝数最小の最短路を P とおく. (S^+ から S^- へのパスが存在しない場合は実行不可能.)

1-2: $p(v) := p(v) + \min\{d(v), \sum_{a \in P} l_p(a)\}$ $(v \in V)$.

1-3: $a \in P$ に対して,

$$\begin{aligned} a \in A_\xi &\Rightarrow \xi(a) := \xi(a) + 1, \\ a \in B_\xi &\Rightarrow \xi(\bar{a}) := \xi(\bar{a}) - 1, \\ a \in C_x &\Rightarrow x(\partial^+ a) := x(\partial^+ a) - 1, \\ & \quad\;\; x(\partial^- a) := x(\partial^- a) + 1. \end{aligned}$$

次に, 定理2.1に基づき, 最短路繰返し法にスケーリング技法を用いて, スケーリングについて閉じたM凸関数 f によるMSFPに対する効率的な算法を構成する. α スケーリングフェイズにおける補助グラフを $G^\alpha_{\xi,x} = (V, A^\alpha_{\xi,x}) = (V, A^\alpha_\xi \cup B^\alpha_\xi \cup C^\alpha_x)$ で表し, $A^\alpha_\xi, B^\alpha_\xi, C^\alpha_x$ はそれぞれ, A_ξ, B_ξ, C_x のうち, 枝容量が α 以上の枝からなる集合とする. 枝長 $l^\alpha \in \mathbf{R}^{A^\alpha_{\xi,x}}$ を

$$l^\alpha(a) = \begin{cases} \alpha\gamma(a) & (a \in A^\alpha_\xi) \\ -\alpha\gamma(\bar{a}) & (a \in B^\alpha_\xi, \bar{a} \in A) \\ f(x + \alpha(\chi_v - \chi_u)) - f(x) & \\ & (a = (u,v) \in C^\alpha_x) \end{cases}$$

とし, ポテンシャル $p \in \mathbf{R}^V$ が与えられたとき, $a \in A^\alpha_{\xi,x}$ に対して, $l^\alpha_p(a) = l^\alpha(a) + p(\partial^+ a) - p(\partial^- a)$ とする. また, $S^+(\alpha) = \{v \mid x(v) - \partial\xi(v) \geq \alpha\}$, $S^-(\alpha) = \{v \mid \partial\xi(v) - x(v) \geq \alpha\}$, $C = \max\{\max_{a \in A} |\underline{c}(a)|, \max_{a \in A} |\bar{c}(a)|, \max_{x,y \in \mathrm{dom}\, f} \|x - y\|_\infty\}$ とする.

Algorithm：容量スケーリング法

S0: $\alpha := 2^{\lfloor \log C \rfloor}, \xi := 0, p := 0$ とおく.

S1: $x/\alpha \in \arg\min(f[-p])^\alpha$ かつ $\| x - \partial\xi \|_\infty \leq (n-1)\alpha$ なる x を見出す.

$a \in A^\alpha_\xi$ に対して, $l^\alpha_p(a) < 0$ ならば $\xi(a) := \xi(a) + \alpha$.

$a \in B^\alpha_\xi$ に対して, $l^\alpha_p(a) < 0$ ならば $\xi(\bar{a}) := \xi(\bar{a}) - \alpha$.

S2: $S^+(\alpha) = \emptyset$ となるまで (2-1)-(2-3) を繰り返す.

2-1: $G^\alpha_{\xi,x}$ における $S^+(\alpha)$ から $v \in V \setminus S^+(\alpha)$ への l^α_p に関する最短路距離 $d(v)$ を計算する. $S^+(\alpha)$ から $S^-(\alpha)$ への枝数最小の最短路を P とおく.

2-2: $p(v) := p(v) + \min\{d(v), \sum_{a \in P} l^\alpha_p(a)\}$ $(v \in V)$.

2-3: $a \in P$ に対して,

$$\begin{aligned} a \in A^\alpha_\xi &\Rightarrow \xi(a) := \xi(a) + \alpha, \\ a \in B^\alpha_\xi &\Rightarrow \xi(\bar{a}) := \xi(\bar{a}) - \alpha, \\ a \in C^\alpha_x &\Rightarrow x(\partial^+ a) := x(\partial^+ a) - \alpha, \\ & \quad\;\; x(\partial^- a) := x(\partial^- a) + \alpha. \end{aligned}$$

S3: $\alpha > 1$ ならば $\alpha := \alpha/2$ とおいて S1に戻る. $\alpha \leq 1$ ならば終了.

参考文献

[1] S. Fujishige (1991). *Submodular Functions and Optimization.* North-Holland.

[2] S. Iwata (1997). A Capacity Scaling Algorithm for Convex Cost Submodular Flows, *Math. Program.*, **76**, 299–308.

[3] S. Iwata and M. Shigeno (2002). Conjugate Scaling Algorithm for Fenchel-type Duality in Discrete Convex Optimization, *SIAM J. Optimization*, **13**, 204–211.

[4] S. Moriguchi, K. Murota and A. Shioura (2002). Scaling Algorithms for M-convex Function Minimization, *IEICE Trans. on Fundamentals*, **E85-A**, 922–929.

[5] K. Murota (1998). Discrete Convex Analysis, *Math. Program.*, **83**, 313–371.

[6] K. Murota (1999). Submodular Flow Problem with a Nonseparable Cost Function, *Combinatorica*, **19**, 87–109.

[7] 室田一雄 (2001). 離散凸解析. 共立出版, 東京.