ソフトウェア信頼度成長過程を考慮したマルチタスクシステムの性能評価に関する一考察

01307475　鳥取大学　*得能貢一　TOKUNO Koichi
01702425　鳥取大学　山田茂　YAMADA Shigeru

1　はじめに

本稿では，通信ソフトウェアシステム[1]のような同時に複数の処理を実行するシステムに対して，ソフトウェアの信頼度成長過程を考慮したシステムの性能評価法について議論する．このとき，ソフトウェア故障発生現象は，マルコフ型不完全デバッグモデル[2]で記述される．そして，処理を完了できる仕事数の確率分布を，無限サーバ待ち行列モデルの考え方を用いて解析し，仕事数に基づく性能評価尺度[3]を導出する．

2　モデルの記述

モデルの仮定を以下に挙げる．

A1. システムにおいて，同時に処理可能な仕事数は十分大きいとする．

A2. 時刻tまでにシステムに到着する仕事数$N(t)$は，到着率θの同次ポアソン過程に従う．システムに到着した仕事は，即座に処理が開始される．

A3. 各仕事の処理時間Yは，独立で同一の指数分布$H(t)=1-e^{-\alpha t}$に従う．

A4. システムにおいて，修正フォールト数がn個のとき，次のソフトウェア故障発生時間間隔X_nは，ハザードレートλ_nをもつ指数分布に従う．λ_nはnの減少関数とする．

A5. ソフトウェア故障発生時には，デバッグ作業が実施される．デバッグ作業は確率$a(0\le a\le 1)$で完全な作業となり，確率$b(=1-a)$で不完全な作業となる．1回の完全なデバッグ作業は，フォールト1個を修正し，システムの信頼性を向上させる．

A6. システムの修復時間は考慮しない．

$\{Z(t),t\ge 0\}$を，時刻tまでに修正された累積フォールト数を表す確率過程とすると，

$$\Pr\{Z(t)=n\}=\frac{g_{n+1}(t)}{a\lambda_n}\quad(n=0,1,2,\ldots),\tag{1}$$

となる．ここで，$g_n(t)$はn個のフォールトを修正するのに要する時間S_nに対する確率密度関数を表し，その分布関数$G_n(t)$は，

$$\begin{aligned}G_n(t)&\equiv\Pr\{S_n\le t\}\\&=\sum_{i=0}^{n-1}A_i^n(1-e^{-a\lambda_i t})\\&\quad(t\ge 0;\ n=1,2,\ldots;\ G_0(t)\equiv\mathbf{1}(t)),\end{aligned}\tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}&A_0^1\equiv 1\\&A_i^n=\prod_{\substack{j=0\\j\ne i}}^{n-1}\frac{\lambda_j}{\lambda_j-\lambda_i}\\&\qquad(n=2,3,\ldots;\ i=0,1,2,\ldots,n-1)\end{aligned}\right\},\tag{3}$$

で与えられる．図1に，$\{Z(t),t\ge 0\}$の状態遷移図を示す．

一方，$\{X(t),t\ge 0\}$を，時刻tまでに到着した仕事のうち，処理を完了することができる仕事数を表す確率過程とする．このとき，$\{N(t)=k\}$が与えられたときの$X(t)$の条件付確率を考慮すると，

$$\Pr\{X(t)=j\}=\sum_{k=0}^{\infty}\Pr\{X(t)=j|N(t)=k\}e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^k}{k!},\tag{4}$$

が得られる．今，n個のフォールトが修正されているとき，任意の1つの仕事がシステムに到着したとする．このとき，その仕事を完了することができる確率は，

$$\Pr\{X_n>Y\}=\frac{\alpha}{\lambda_n+\alpha},\tag{5}$$

で与えられる．また仮定A2より，$\{N(t)=k\}$が与えられているとき，任意の1つの仕事に対する到着時間は，

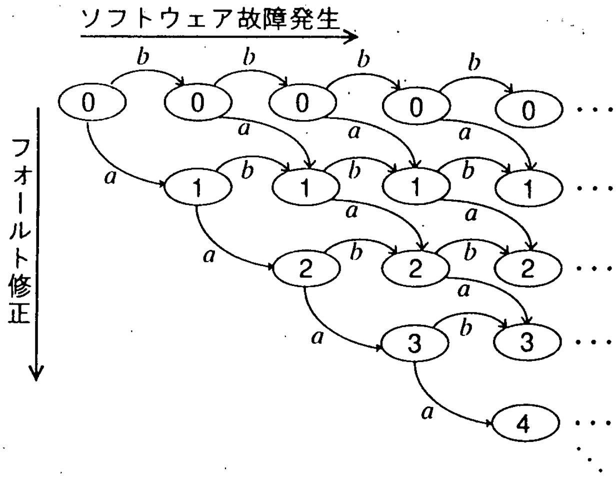

図1　$Z(t)$ の状態遷移図．

時間区間 $(0,t]$ で一様に分布するので [4]，時刻 t までに到着した任意の１つの仕事が処理を完了できる確率は，

$$p(t) = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \Pr\{Z(x)=n\} \cdot \Pr\{X_n > Y\} \frac{dx}{t}$$
$$= \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha G_{n+1}(t)}{a\lambda_n(\lambda_n+\alpha)}, \qquad (6)$$

となる．

したがって，$X(t)$ の条件付確率は，仮定A3より，

$$\Pr\{X(t)=j|N(t)=k\} = \begin{cases} \binom{k}{j}[p(t)]^j[1-p(t)]^{k-j} & (j=0,1,2,\ldots,k) \\ 0 & (j>k) \end{cases}, \qquad (7)$$

で与えられる．このとき，式 (4) は，

$$\Pr\{X(t)=j\} = \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j}[p(t)]^j[1-p(t)]^{k-j} e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^k}{k!}$$
$$= e^{-\theta t p(t)} \frac{[\theta t p(t)]^j}{j!}, \qquad (8)$$

となる．

また，$\{W(t), t \geq 0\}$ を，時刻 t までに到着した仕事のうち，処理を完了することができない仕事数を表す確率過程とすると，上述と同様な議論ができる．すなわち，

$$\left.\begin{aligned} \Pr\{W(t)=j\} &= e^{-\theta t q(t)} \frac{[\theta t q(t)]^j}{j!} \\ q(t) &= \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_{n+1}(t)}{a(\lambda_n+\alpha)} \end{aligned}\right\}, \qquad (9)$$

となる．ここで，$p(t)+q(t) \equiv 1$ であることに注意する．

3　性能評価尺度

時刻 t までに到着した仕事のうち，処理を完了することができる仕事数の期待値を，**期待処理可能仕事数**と呼ぶことにし，これは，

$$\Lambda(t) \equiv \mathrm{E}[X(t)] = \theta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha G_{n+1}(t)}{a\lambda_n(\lambda_n+\alpha)}, \qquad (10)$$

で与えられる．また，処理を完了することができない仕事数の期待値を，**期待損失仕事数**と呼ぶことにし，これは，

$$M(t) \equiv \mathrm{E}[W(t)] = \theta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_{n+1}(t)}{a(\lambda_n+\alpha)}, \qquad (11)$$

で与えられる．ここで，$N(t) = X(t) + W(t)$ であるので，$\Lambda(t) + M(t) \equiv \theta t$ であることに注意する．

謝　辞

本研究の一部は，文部科学省科学研究費補助金若手研究 (B) Grant No. 13780365 の援助を受けたことを付記する．

参考文献

[1] 白鳥則郎, 通信ソフトウェア工学, 培風館, 東京, 1995.

[2] K. Tokuno and S. Yamada, "An imperfect debugging model with two types of hazard rates for software reliability measurement and assessment," Mathematical and Computer Modelling, Vol. 31, Nos. 10–12, pp. 343–352, May 2000.

[3] 三根久, 河合一, 信頼性・保全性の数理, 朝倉書店, 東京, 1982.

[4] S. M. Ross, Applied Probability Models with Optimization Applications, Holden-Day, San Francisco, 1970.