

複数の環状路を持つ円盤都市における平均距離と環状路の最適配置

02502660 筑波大学 ◦藤田 学洋 FUJITA Satohiro
 01205430 筑波大学 鈴木 勉 SUZUKI Tsutomu

1. はじめに

円盤都市内の平均距離に関しては、無数の放射路に環状路を1本または無限本設置した交通網で導出されている^{[1][2]}が、環状路が複数(2本以上の有限個本)の場合の平均距離は導かれていない。本稿では、一様な人口分布を有する円盤都市内に複数の環状路を設置した場合の地点別及び全体の平均距離を導出し、環状路と平均距離の関係と平均距離を最小にする環状路配置を求めることを目的とする。

2. 経路パターンと平均距離の導出

円盤の中心Oを極として無数の放射路を有する半径1の円盤都市を考える。極座標系を用いて、出発地A(r, θ)から目的地B(s, φ)まで最短経路を移動するものとする。但し、環状方向については、中心Oを中心とする半径a₁, a₂, ..., a_n (0 < a₁ < a₂ < ... < a_n < 1)のn本の環状路の何れかを利用しなければならないとする。この交通網をn環状交通網(n-ring/radial)と呼ぶ。

中心から数えてi番目の環状路を経由する経路のAからBまでの距離d_iは

$$d_i(r, \theta, s, \phi) = \begin{cases} r + s & i = 0 \\ |r - a_i| + a_i |\theta - \phi| + |s - a_i| & i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (1)$$

と表されるので、最短距離は $d = \min_{0 \leq i \leq n} d_i$ である。環状路が3本の場合を例に、Aからの経路パターンと使用環状路による領域分割 S_i = {B | d = d_i} を図1に示す。S₀は放射路のみを使用する領域で、S_i (1 ≤ i ≤ n) はi番目の環状路を使う領域である。

a₀=0, a_{n+1}=1とすれば、a_i ≤ r < a_{i+1} の場合、Aより内側のS₀~S_iの隣接領域の曲線部境界上の点(s, φ)は、

$$s = \frac{1}{2}(a_{k+1} - a_k) |\theta - \phi| + a_k, \quad 0 \leq k \leq i-1, 0 \leq \theta - \phi \leq 2 \quad (2)$$

を満たし、外側のS_iとS_{i+1}の隣接領域の境界上の点は

$$s = \frac{1}{2}(a_{i+1} - a_i) |\theta - \phi| + a_{i+1} + a_i - r, \quad 0 \leq \theta - \phi \leq \frac{2(r - a_i)}{a_{i+1} - a_i} \quad (3)$$

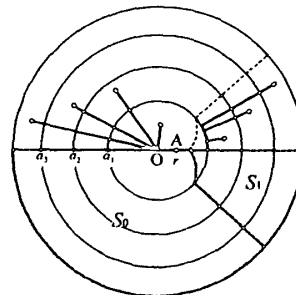
を満たす。これを用いれば、一様な人口分布でのAから任意の目的地までの地点別平均距離D'_{nr}(r)は、

$$D'_{nr}(r) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^n \int_{a_i}^{a_{i+1}} \int_0^{2\pi} d(r, \theta, s, \phi) ds d\phi \quad (4)$$

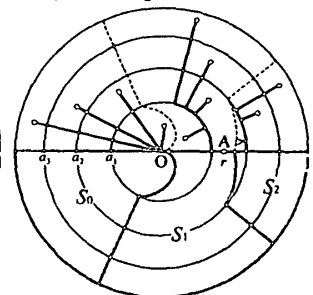
により表される。また、n環状交通網における任意の2地点間の平均距離D_{nr}は、

$$D_{nr} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 D'_{nr}(r) r dr d\theta = 2 \int_0^1 r D'_{nr}(r) dr \quad (5)$$

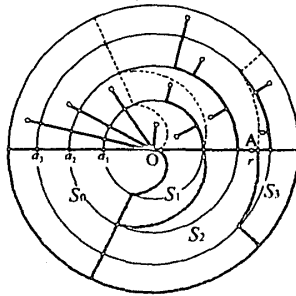
1) 0 ≤ r < a₁



2) a₁ ≤ r < a₂



3) a₂ ≤ r < a₃



4) a₃ ≤ r ≤ 1

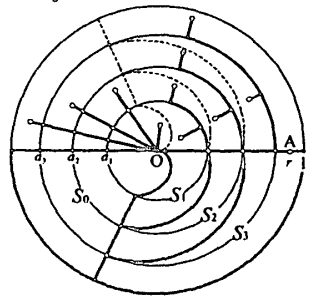


図1 経路パターンと領域分割 (n=3)

により求められる。

3. 地点別平均距離の分布

以上の式を環状路が1, 2, 3本の場合について求めた結果を、放射路のみ(Radial), 放射環状(Radial-arc/radial), 中心を通れない放射環状(Radial-arc), 直線距離(Direct)の平均距離D_R, D_{AR}, D_A, D_Dと対比させながら表1に示す。環状路の本数が無限に多くなると、n環状交通網の平均距離は放射環状のそれに収斂する。n環状交通網の地点別平均距離の分布は図2および図3のようになる。最も外側の環状路から都市外縁まではrの1次式となるが、それ以外の区間では全てrの4次式により表される。

円盤の中心Oではどの経路パターンとも最小値2/3をとるが、中心から離れるに従って経路によって異なる増加率で平均距離は増大していく。放射路のみの分布から環状を1本追加すると平均距離は大きく減少し、環状路付近の減少が特に大きいことがわかる。環状路の本数を増やしていくと、放射環状交通網の平均距離の分布に近づいていく。

1環状交通網を例に、環状路の位置による地点別平均距離の変化を見ると(図4)、環状路が中心から遠ざかるにつれて環状路の内側の平均距離が増加し、外側の地点平均が減少していくことがわかる。さらに遠ざけていくと、a₁ = √2/3 ≈ 0.817を境にして環状路の外側の平均距離も増加に転じる。すなわ

ち、これ以上外側に環状路を設置しても、都市内に住む全ての人にとって不利であることがわかる。

4. 環状路の最適配置

2 地点間の平均距離 D_{nR} を最小にする環状路の最適配置を求めると、図3のようになる。これはすなわち、地点別平均距離の分布を回転して得られる回転体の体積を最小にする位置を決めていることに等しい。環状路間の間隔は、中心から遠ざかるにしたがって段々狭くなるような配置パターンとなる。なお、 $n=1$ の場合は解析的に求めることができ、環状路の半径は $a_1^* = \sqrt{(27-3\sqrt{43})}/19 \approx 0.621$ となる。

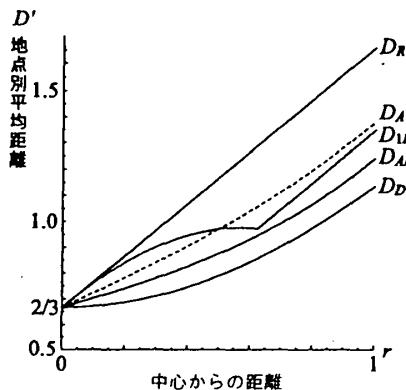


図2 経路別の D' の分布

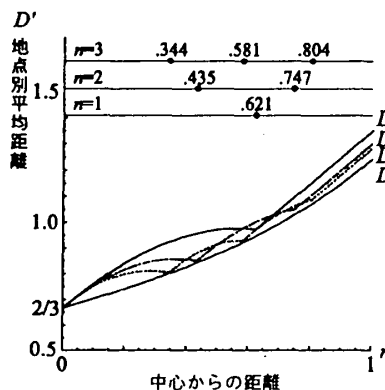


図3 環状路の最適配置と D'_{nR} の分布

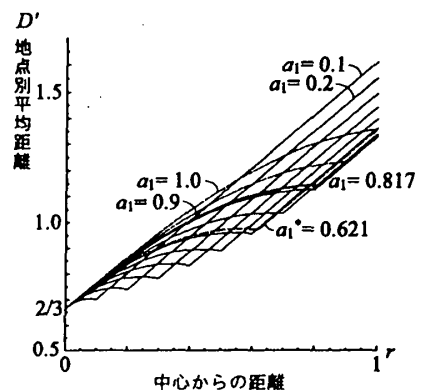


図4 環状路の位置による D'_{1R} の変化

表1 半径1の円盤都市における平均距離 D (Direct は[2]に拠る)

n	地点別平均距離 D'	平均距離 D	最適配置のときの平均距離 D
Radial (放射)	$0 \quad D'_R(r) = r + \frac{2}{3}$	$0 \leq r \leq 1 \quad D_R = \frac{4}{3}$	1.333
1-ring/radial (1環状)	$1 \quad D'_{1R}(r) = \begin{cases} \frac{1}{3\pi a_1} [r^4 - 4a_1 r^3 + 6(a_1^2 - 1)r^2] + r + \frac{2}{3} \\ r + \frac{2}{3} + \frac{a_1^3 - 2a_1}{\pi} \end{cases}$	$0 \leq r < a_1 \quad D_{1R} = \frac{4}{3} - \frac{19}{45\pi} a_1^5 + \frac{2}{\pi} a_1^3 - \frac{2}{\pi} a_1$ $a_1 \leq r \leq 1$	1.078
2-ring/radial (2環状)	$2 \quad D'_{2R}(r) = \begin{cases} \frac{1}{3\pi a_1} [r^4 - 4a_1 r^3 + 6(a_1^2 - 1)r^2] + r + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3\pi(a_2 - a_1)} [r^4 - 4(a_1 + a_2)r^3 + 6(a_1 + a_2)^2 - 1]r^2 \\ + 4a_1(3 - a_1^2 - 3a_1 a_2 - 3a_2^2)r + a_1 a_2(7a_1^2 + 6a_1 a_2 - 6) - 2a_1^4 + r + \frac{2}{3} \\ r + \frac{2}{3} + \frac{a_2^3 - 2a_2}{\pi} + \frac{a_1}{3\pi} (2a_1^2 - a_1 a_2 - a_2^2) \end{cases}$	$0 \leq r < a_1 \quad D_{2R} = \frac{4}{3} - \frac{19}{45\pi} a_1^5 + \frac{2}{\pi} a_1^3 - \frac{2}{\pi} a_1$ $+ \frac{1}{45\pi} a_1(a_2 - a_1)$ $(18a_1^3 + 11a_1^2 a_2 - 11a_1 a_2^2 - 13a_2^3 - 60a_1 - 30a_2)$ $a_1 \leq r < a_2$ $a_2 \leq r \leq 1$	1.040
3-ring/radial (3環状)	$3 \quad D'_{3R}(r) = \begin{cases} \frac{1}{3\pi a_1} [r^4 - 4a_1 r^3 + 6(a_1^2 - 1)r^2] + r + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3\pi(a_2 - a_1)} [r^4 - 4(a_1 + a_2)r^3 + 6(a_1 + a_2)^2 - 1]r^2 \\ + 4a_1(3 - a_1^2 - 3a_1 a_2 - 3a_2^2)r + a_1 a_2(7a_1^2 + 6a_1 a_2 - 6) - 2a_1^4 + r + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3\pi(a_3 - a_2)} [r^4 - 4(a_2 + a_3)r^3 + 6(a_2 + a_3)^2 - 1]r^2 \\ + 4a_2(3 - a_2^2 - 3a_2 a_3 - 3a_3^2)r + a_2 a_3(7a_2^2 + 6a_2 a_3 - 6) - 2a_2^4 \\ + (a_1 - a_2)(a_1 a_2^2 + 2a_2^3 + 2a_2^2 a_3 + a_1 a_2 a_3) + r + \frac{2}{3} \\ r + \frac{2}{3} + \frac{a_3^3 - 2a_3}{\pi} + \frac{1}{3\pi} [a_2(2a_2^2 - a_2 a_3 - a_3^2) \\ + a_1(2a_1^2 - a_1 a_2 - a_2^2)] \end{cases}$	$0 \leq r < a_1 \quad D_{3R} = \frac{4}{3} - \frac{19}{45\pi} a_1^5 + \frac{2}{\pi} a_1^3 - \frac{2}{\pi} a_1$ $+ \frac{1}{45\pi} [a_2(a_3 - a_2)$ $(18a_1^3 + 11a_1^2 a_2 - 11a_1 a_2^2 - 13a_2^3 - 60a_1 - 30a_2)$ $- 18a_1^2 + 7a_1^4 a_2 + a_1^3(22a_2^2 + 60) + 2a_1^2(a_2^3 - 15a_2)$ $- a_1(13a_2^4 + 30a_2^3)]$ $a_1 \leq r < a_2$ $a_2 \leq r < a_3$ $a_3 \leq r \leq 1$	1.026
Radial-arc/radial (放射環状)	$\infty \quad D'_{AR}(r) = \frac{2}{3\pi} r^3 + \frac{\pi-2}{\pi} r + \frac{2}{3}$	$0 \leq r \leq 1 \quad D_{AR} = \frac{4}{3} - \frac{16}{15\pi}$	0.994
Radial-arc (中心通過不可の放射環状)	$D'_R(r) = \frac{4-\pi}{6} r^3 + \frac{\pi-2}{2} r + \frac{2}{3}$	$0 \leq r \leq 1 \quad D_R = \frac{4}{15}(\pi+1)$	1.104
Direct (直線)	$D'_D(r) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{32} r^4 + \dots$	$0 \leq r \leq 1 \quad D_D = \frac{128}{45\pi}$	0.905

5. おわりに

本稿では、環状路の本数が限られている場合について平均距離と最適位置を導出した。放射路の本数が限られる場合については今後の課題としたい。

参考文献

- [1] Vaughan, R. (1987): Urban spatial traffic patterns. Pion Limited, 334 p.
- [2] 栗田 治・腰塚武志 (1988): 周上で一様な点に関する平均値のある導出法とその応用. 日本 OR 学会春季アブストラクト集, 181-182.