

凹費用生産輸送問題に対する単体分枝限定法

筑波大学システム情報工学研究科 *永井秀稔 NAGAI Hidetoshi
01107230 筑波大学電子情報工学系 久野誉人 KUNO Takahito

1 はじめに

本研究では、生産輸送問題を取り扱う。ここで言う生産輸送問題とは、ある一種類の品物をいくつかの工場で生産し、多数の販売所へと出荷する計画を立てる際に、各工場での生産量とそこから販売所への輸送量を全体のコストが最小になるように決定する問題である。

工場の集合を M 、販売所の集合を N とし、その要素数をそれぞれ m, n とする。決定すべき変数は、各工場での生産量を $y = \{y_i\}, i \in M$ 、各工場から各販売所への輸送量を $x = \{x_{ij}\}, i \in M, j \in N$ とする。

本研究では、工場での生産コスト関数 $g(y)$ が分離不能な非減少凹関数である場合を扱う。分離不能とは $g(y) = \sum_{i \in M} g_i(y_i)$ とはできないことを言う。これは各工場の生産コストが相互に影響しあい、独立ではないことを意味している。

今までの研究では、分離可能である場合か、工場数が非常に小さい場合を扱っているものばかりである。そこで本研究では、単体分枝限定法を基本とした厳密算法を提案し、その性能実験を行なった。

2 問題の定式化

我々の対象とする問題は次のようなネットワーク型の数理計画問題として定式化できる。

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{最小化 } w = \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} + g(y) \\ \text{条件 } \sum_{j \in N} x_{ij} = y_i, \quad i \in M \\ \sum_{i \in M} x_{ij} = b_j, \quad j \in N \\ x_{ij} \geq 0, \quad i \in M, j \in N \\ 0 \leq y_i \leq s_i, \quad i \in M \end{array} \right.$$

- $g : D \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$: 非減少凹関数
- c, b, s : 非負整数

本研究の仮定として、各工場での生産量の上限、各

販売所での需要量、及び一単位当たりの輸送コストはそれぞれ非負整数 $s = \{s_i\}, i \in M, b = \{b_j\}, j \in N, c = \{c_{ij}\}, i \in M, j \in N$ で与えている。また生産量及び輸送量は非負とする。

ここで x の実行可能領域についてまとめると、

$$X(y) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{m \times n} \left| \begin{array}{l} \sum_{j \in N} x_{ij} = y_i, \quad i \in M \\ \sum_{i \in M} x_{ij} = b_j, \quad j \in N \\ x_{ij} \geq 0, \quad i \in M, j \in N \end{array} \right. \right\}$$

となる。また $X(y) \neq \emptyset$ となる y の必要十分条件は $\sum_{i \in M} y_i = \sum_{j \in N} b_j$ なので、 y の実行可能領域は、

$$Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^m \left| \begin{array}{l} \sum_{i \in M} y_i = \sum_{j \in N} b_j \\ 0 \leq y_i \leq s_i, \quad i \in M \end{array} \right. \right\}$$

とできる。ここでは、 $\emptyset \neq Y \subseteq D$ を仮定する。

3 基本的な解法

$y \in Y$ が与えられれば、問題 (P) は次のようなヒッチコック型輸送問題となり、多項式時間で解くことができる。

$$f(y) = \min \left\{ \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} \mid x \in X(y) \right\}$$

ここで f は、 Y 上の多面凸関数となる。

そこで、まずは $m \times (n+1)$ 次元であった問題 (P) を次のような m 次元の問題へ落とす。

$$(Q) \left\{ \begin{array}{l} \text{最小化 } w = f(y) + g(y) \\ \text{条件 } y \in Y \end{array} \right.$$

すると f の多面凸性により、この問題 (Q) の最適解は次の多面体の頂点の中に存在する。

$$F = \{(y, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \mid z \geq f(y), y \in Y\}$$

さらに、この多面体 F の頂点は整数点であるので、問題 (Q) 及び元の問題 (P) の最適解は整数解となる。

基本的な解法として、 Y から生産量の上制限約を除いた領域が単体になるので、それを繰り返し複数の単体に分割していく単体分枝限定法が考えられる。 $g(y)$ が線形であれば、輸送問題に帰着させて多項式時間で解くことができるので、 $g(y)$ を単体のすべての頂点を通る線形関数 (lower envelope) に緩和した問題を下界値計算に用いるのが妥当である。そして単体の分割に関しては、収束性が保証されること及び分割後領域の生成の容易さから、単体の最長辺で二等分割することとした。

4 提案する算法

4.1 下界値計算

子問題として、分割した単体領域 Y_k を表す制約式をそのまま入れるとネットワーク構造を崩してしまう。そこでこれを次のような領域 \bar{Y}_k に緩和した。

$$y^k \in Y_k \Rightarrow y^k \in \bar{Y}_k = \{y \in \mathbb{R}^m \mid l_i \leq y_i \leq u_i, i \in M\}$$

- $l_i = \lfloor \min \{y_i \mid y \in Y_k\} \rfloor, i \in M$
- $u_i = \min \{\lceil \max \{y_i \mid y \in Y_k\} \rceil, s_i\}, i \in M$

整数への引き締めは、最適解が整数解となることによる。これらの制約式を用いた緩和問題は、各工場の生産上限 u はダミー販売所を設けることにより、また生産下限 l はダミー販売所への輸送量に上限を設けることにより、輸送問題に対するアルゴリズムに多少手を加えただけで解くことができる。

さらに、この緩和問題を解いて得られた解が元の分割した単体領域 Y_k に含まれていない場合、下界値を引き締めることが考えられる。その方法もいくつか提案した。

4.2 分割の打ち切り

先に述べたように、単体の分割方法を最長辺で二等分割とすれば、分割された単体は必ず1点に収束することが保証される。しかし実際には、もっと早い段階で分割を打ち切ることが望ましい。良い下界値、上界値を求めることは必須であるが、それ以外にも解の性質を利用した以下のような分割の打ち切りが考えられる。

一つ目は最適解が整数解であることを利用する。分割して小さくなった単体領域 Y_k 中に、もし整数解が1個もなければ、 Y_k 中に最適解は存在せず、整数解がただ1個の場合は、それが最適解か判定すればよい、ということが言える。幸い、下界値計算で行なったものと同じ緩和をした領域 \bar{Y}_k に対して、整数解が存在しないか、ただ1個だけかの判定は容易に行なうことができる。ただ1個だけの場合、実行可能であれば厳密に Y_k に入っていないくてもよいということを踏まえれば、これらの判定により分割を打ち切ることができる場合もある。

二つ目は最適解が多面体 F の頂点であることを利用する。分割を打ち切ることができる理由は先程と同様である。その判定には多少工夫が必要であるが、多面体 F の各面が輸送問題の最適基底より得られることを考慮すれば、感度分析等を用いることにより判定することが可能である。

また、この二つの打ち切り方法を比較すると、整数点の個数に比べ、多面体 F の頂点の個数はかなり少ないと考えられるため、二つ目の打ち切り方法のほうが有利であると予想される。

5 まとめと今後の課題

生産コストが分離不能な非減少凹関数である生産輸送問題に対する算法として、単体分枝限定法を効率よく用いる方法をいくつか提案した。

詳しいアルゴリズムと実験結果は、当日に発表させていただきます。

今後の課題としては、実行可能領域が単体となるような他の問題への応用などが考えられる。

参考文献

- [1] K. Holmberg and H. Tuy. A production-transportation problem with stochastic demand and concave production costs. *Mathematical Programming*, 85:157-179, 1999.
- [2] T. Kuno and T. Utsunomiya. A lagrangian based branch-and-bound algorithm for production-transportation problems. *Journal of Global Optimization*, 18:59-73, 2000.
- [3] H. Tuy, S. Channadan, A. Migdalas, and P. Värbrand. Strongly polynomial algorithm for a production-transportation problem with concave production cost. *Optimization*, 27:205-227, 1993.