MAP/M/1-PS待ち行列の系内滞在時間分布

02602394　京都大学大学院 情報学研究科　*増山 博之　MASUYAMA Hiroyuki
01306754　京都大学大学院 情報学研究科　滝根 哲哉　TAKINE Tetsuya

1. はじめに

プロセッサシェアリング待ち行列は、コンピュータ工学の分野において重要なモデルであり、系内滞在時間が主たる研究対象である。現在までにM/G/1-PS及びGI/M/1-PS待ち行列に対していくつかの研究がなされてはいるが、結果は限定的なものにとどまっている。特に系内滞在時間分布に関する結果は、数値計算という観点からみると、必ずしも望ましいものとは言えない[2][3]。

本研究では、マルコフ型到着過程(MAP)を入力とするMAP/M/1-PS待ち行列における系内滞在時間が、準出生死滅過程に類似した吸収マルコフ連鎖に支配されることに注目し、系内滞在時間分布の単純かつ数値的に安定した再帰式を導出した。

2. モデルと既知の結果

まず、MAPについて簡単に述べる。状態集合 $\mathcal{M}=\{1,2,\dots,M\}$ を持つ既約で正再帰的な連続時間マルコフ連鎖が存在すると仮定する。このマルコフ連鎖は状態 $i\in\mathcal{M}$ に平均 c_i^{-1} の指数時間だけ滞在した後、状態 $j\in\mathcal{M}$ へ確率 $p_{i,j}$ で遷移する。ただし、$\sum_{j\in\mathcal{M}}p_{i,j}=1$ $(\forall i\in\mathcal{M})$ とする。そして、状態 i から状態 j への遷移が起こった時、確率 $d(i,j)$ で到着が発生する。一般性を失うことなく、$d(i,i)=1$ $(\forall i\in\mathcal{M})$ を仮定することができる。ここで、C と D は (i,j) 成分がそれぞれ

$$C_{i,j}=\begin{cases}-c_i & \text{if } i=j\\ c_ip_{i,j}\{1-d(i,j)\} & \text{otherwise}\end{cases}$$
$$D_{i,j}=c_ip_{i,j}d(i,j)$$

で与えられる行列とする。このとき、MAPを支配するマルコフ連鎖の無限小作用素は $C+D$ となる。このマルコフ連鎖の定常状態確率ベクトルを π とすると、平均到着率は $\lambda=\pi De$ で与えられる。

本研究が扱うモデルでは、サービス時間は独立で同一に分布し、平均 μ^{-1} の指数分布に従うとする。したがって利用率は $\rho=\lambda\mu^{-1}$ となる。以下では $\rho<1$ を仮定し、システムは定常状態にあるとする。

また、サービス時間が独立で同一な指数分布に従うことから、MAP/M/1-PS待ち行列の客数分布はMAP/M/1-FCFS待ち行列の客数分布と一致することが知られている。つまり系内客数過程は準出生死滅過程となり、その計算手法が確立されている[4]。

3. 系内滞在時間分布

本研究の主要な結果である系内滞在時間分布について述べる。そのためにいくつかの表記を導入する。まず、系内に n 個の客がいるときに到着する客を客 C_n と呼び、客 C_n の系内滞在時間を W_n とする。さらに、S_n を客 C_n の到着直後におけるMAPを支配するマルコフ連鎖の状態とする。ここで $\overline{w}_n(x)$ $(x\ge 0,n=0,1,\dots)$ を $M\times 1$ ベクトルとし、その第 j 成分は $\Pr[W_n\ge x\mid S_n=j]$ を表すものとする。このとき、定義より明らかに $\overline{w}_n(0)=e$ となる。また、簡単な考察から、$\overline{w}_n(x)$ $(x>0)$ は以下の線形微分方程式をみたすことが分かる。

$$\frac{d}{dx}\overline{w}_n(x)=D\overline{w}_{n+1}(x)+(C-\mu I)\overline{w}_n(x)+\frac{n\mu}{n+1}\overline{w}_{n-1}(x)\quad n=0,1,\dots \tag{1}$$

ただし、$\overline{w}_{-1}(x)=0$ $(\forall x\ge 0)$ とする。

さらに、I を適当な次元の単位行列とし、$\overline{w}(x)$ 及び T をそれぞれ

$$\overline{w}(x)=\begin{bmatrix}\overline{w}_0(x)\\ \overline{w}_1(x)\\ \overline{w}_2(x)\\ \vdots\end{bmatrix} \tag{2}$$

$$T=\begin{bmatrix}C-\mu I & D & O & & & \\ \frac{\mu}{2}I & C-\mu I & D & O & & \\ O & \frac{2\mu}{3}I & C-\mu I & D & O & \\ & O & \frac{3\mu}{4}I & C-\mu I & D & O\\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots\end{bmatrix}$$

と定義すると、(1)は次のように書き換えることができる。

$$\frac{d}{dx}\overline{w}(x)=T\overline{w}(x) \tag{3}$$

ここで T は加算無限個の状態 (n,j) $(n=0,1,\dots,j\in\mathcal{M})$ を持つ連続時間吸収マルコフ連鎖の過渡的な遷移を支配するdefectiveな無限小作用素と見なすことができる。したがって、$S_n=j$ が与えられた下での客 C_n の条件付きの系内滞在時間は、状態 (n,j) から吸収状態までの初度到達時間と等価である。

また、微分方程式 (3) の形式的な解は $\overline{w}(x)=\exp(Tx)e$ となるので、一様化の手法を用いると [5]、

$$\overline{w}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\theta+\mu)^kx^k}{k!}e^{-(\theta+\mu)x}\left[I+\frac{T}{\theta+\mu}\right]^ke \tag{4}$$

を得る。ただし、$\theta = \max\{|C_{j,j}|; j \in \mathcal{M}\}$ とする。ここで $\boldsymbol{h}_{n,k}$ $(n = 0, 1, \ldots, k = 0, 1, \ldots)$ を

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_{0,k} \\ \boldsymbol{h}_{1,k} \\ \vdots \end{bmatrix} = \left[\boldsymbol{I} + \frac{1}{\theta+\mu}\boldsymbol{T}\right]^k \boldsymbol{e} \tag{5}$$

をみたす $M \times 1$ ベクトルとする。このとき、$\boldsymbol{h}_{n,k}$ の第 j 成分は $\boldsymbol{I} + (\theta+\mu)^{-1}\boldsymbol{T}$ によって支配される一様化されたマルコフ連鎖において、状態 (n,j) から初めて吸収状態に到達するまでの遷移回数が k 回を越える確率であると考えられる。したがって、$\boldsymbol{h}_{n,k}$ $(n = 0, 1, \ldots, k = 0, 1, \ldots)$ は次の不等式をみたす。

$$\boldsymbol{0} < \boldsymbol{h}_{n,k+1} < \boldsymbol{h}_{n,k} \le \boldsymbol{e} \tag{6}$$

ただし、$\boldsymbol{h}_{n,0} = \boldsymbol{e}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ とする。

Theorem 1 $\overline{\boldsymbol{w}}_n(x)$ $(x \ge 0, n = 0, 1, \ldots)$ 及び、ランダムに選ばれた客の系内滞在時間の補分布 $\overline{W}(x)$ $(x \ge 0)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{w}}_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta+\mu)^k x^k}{k!} e^{-(\theta+\mu)x} \boldsymbol{h}_{n,k} \\ \overline{W}(x) &= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{\pi}_0 \boldsymbol{R}^n \boldsymbol{D} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta+\mu)^k x^k}{k!} e^{-(\theta+\mu)x} \boldsymbol{h}_{n,k} \end{aligned} \tag{7}$$

となる。ここで列 $\{\boldsymbol{h}_{n,k}\}$ は以下のように再帰的に決定される。まず $\boldsymbol{h}_{n,0} = \boldsymbol{e}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ とする。さらに各 k $(k = 0, 1, \ldots)$ に対して

$$\boldsymbol{h}_{n,k+1} = \frac{1}{\theta+\mu}\left[\boldsymbol{D}\boldsymbol{h}_{n+1,k} + (\theta\boldsymbol{I} + \boldsymbol{C})\boldsymbol{h}_{n,k} + \frac{n\mu}{n+1}\boldsymbol{h}_{n-1,k}\right] \quad n = 0, 1, \ldots$$

とする。ただし、ここでは $\boldsymbol{h}_{-1,k} = \boldsymbol{0}$ と定義している。

列 $\{\boldsymbol{h}_{n,k}\}$ の再帰式は、非負数の加算及び乗算しか含まないので数値的に安定である。

4. 計算手順と精度保証

定理 1 の結果をもとに任意に固定された x $(x \ge 0)$ に対して、$\overline{W}(x)$ の近似値は次のようにして計算できる。まず最初にある正数 ε $(0 < \varepsilon \ll 1)$ を定め、

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{N(\varepsilon)} \boldsymbol{\pi}_0 \boldsymbol{R}^n \boldsymbol{D}\boldsymbol{e} > 1 - \varepsilon \tag{8}$$

をみたす非負整数 $N(\varepsilon)$ を求める。このとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{\pi}_0 \boldsymbol{R}^n \boldsymbol{D}\boldsymbol{e} = \lambda \tag{9}$$

であるので、$N(\varepsilon)$ は唯一に決定される。

次にある正数 ε' $(0 \le \varepsilon' \ll 1)$ を定め、

$$\sum_{k=L(\varepsilon',x)}^{R(\varepsilon',x)} \frac{(\theta+\mu)^k x^k}{k!} e^{-(\theta+\mu)x} > 1 - \varepsilon' \tag{10}$$

をみたす 2 つの非負整数 $L(\varepsilon', x)$ 及び $R(\varepsilon', x)$ を求める。$L(\varepsilon', x)$ 及び $R(\varepsilon', x)$ を求めるアルゴリズムの 1 つが Fox と Glynn によって提案されている [1]。

最後に、$\overline{W}(x)$ の近似値 $\overline{W}_{\rm comp}(x)$ を次式により計算する。

$$\overline{W}_{\rm comp}(x) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{N(\varepsilon)} \boldsymbol{\pi}_0 \boldsymbol{R}^n \boldsymbol{D} \times \sum_{k=L(\varepsilon',x)}^{R(\varepsilon',x)} \frac{(\theta+\mu)^k x^k}{k!} e^{-(\theta+\mu)x} \boldsymbol{h}_{n,k} \tag{11}$$

(11) より、$\overline{W}_{\rm comp}(x)$ は図 1 の影付き領域の $\boldsymbol{h}_{n,k}$ だけを必要としているが、定理 1 の再帰式の構造から、結果的に図 1 の台形領域 (斜線部) における $\boldsymbol{h}_{n,k}$ を計算しなければならないことに注意が必要である。

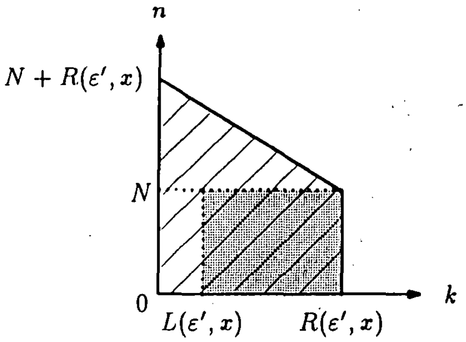

図 1: 列 $\boldsymbol{h}_{n,k}$ の計算領域

最後に、(6)-(11) から、$\overline{W}(x)$ と $\overline{W}_{\rm comp}(x)$ の絶対誤差の上限に関して、

$$\overline{W}(x) - \overline{W}_{\rm comp}(x) < \varepsilon + \varepsilon'$$

を得る。

参考文献

1. B. L. Fox and P. W. Glynn, Computing Poisson Probabilities, Comm. ACM, 31 (1988) 440-445.
2. F. Guillemin and J. Boyer, Analysis of the M/M/1 Queue with Processor Sharing via Spectral Theory, QUESTA 39 (2001) 377-397.
3. J. Morrison, Response time for a processor-sharing system, SIAM J. Appl. Math. 45 (1985) 152-167.
4. M. F. Neuts, *Structured Stochastic Matrices of the M/G/1 Type and Their Applications* (Marcel Dekker, New York, 1989).
5. H. C. Tijms, *Stochastic Model: An Algorithmic Approach* (John Wiley & Sons, Chichester, 1994).