2003年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

可変ウェイトと提携形ゲームを用いた費用分担決定法

01405480 政策研究大学院大学 *中林 健 NAKABAYASHI Ken
01302170 政策研究大学院大学 刀根 薫 TONE Kaoru
政策研究大学院大学 SAHOO, Biresh K.

1. はじめに

共同事業等にかかる固定費用を複数の参加主体の間でどのように分担すれば良いかという問題は、我々の身近な状況から国家レベルの政策イシューに至るまで様々な場に常に存在し、経済学や協力ゲーム理論の分野で研究が積み重ねられてきた。これまでは、主として客観的な効用関数や節約費用の存在を前提として配分決定法が提案されてきたが、実際の問題では、各主体の目に見える活動状況を基に様々な項目を評価して決定しなければならない場合が多い。

このような問題に対して、Cook and Kress[1] は、複数項目のデータを扱うことのできる DEA(Data Envelopment Analysis) を利用した費用分担決定法を提案している。しかし、彼らの方法はある種の平等性を達成するものの、分担が極めて不公平となる事例を示すことができ、参加主体の合意を形成する方法として必ずしも適しているとは言えないことがわかる。

本研究では、DEA の可変ウェイトの考え方を利用し、なおかつ協力ゲーム理論の提携形ゲームのフレームワーク上で議論することを可能とした。これにより、主体間の合意形成に繋がるような分担決定法を考案することが可能となる。

2. ウェイト選択の問題

2.1 純利益に応じた費用分担

公平性の観点に立てば、多くの利益を獲得して支払能力の高い主体が、より多くの費用を負担することが望ましい。このため、本研究では、各主体の純利益（概念的にベネフィットからコストを減じたものと定義する）に応じた費用分担について考えてみる。

n 個の DMU(Decision Making Unit) を評価対象とし、$\mathrm{DMU}_j (j \in \{1, \cdots, n\})$ のコスト・ベネフィットの値が複数の入力データ $x_{1j}, \cdots, x_{mj}$ と出力データ $y_{1j}, \cdots, y_{sj}$ で与えられているとき、全体に対する DMU_o の純利益の割合は以下の式によって表される。ただし、u_r, v_i は入出力項目にかかるウェイトである。

$$p_o = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}}{\sum_{r=1}^{s} u_r (\sum_{j=1}^{n} y_{rj}) - \sum_{i=1}^{m} v_i (\sum_{j=1}^{n} x_{ij})}$$

上式において、分母は n 個全ての DMU の純利益の合計であり、分子は DMU_o の純利益を表している。事業の必要性を認識し、純利益に応じた負担の原則に同意する DMU は、項目の選択が適切であるならばこの比率に従って固定費用を分担することに納得できると考えられる。仮にウェイト u_r, v_i を 1 つに定めることができれば分担の決定は容易であるが、全ての DMU が常に唯一の価値基準を共有できるとは限らず、現実の問題では価値基準の相違によって合意形成が困難となる事例が多く見られる。この問題を次に考察する。

2.2 利己的なウェイト選択により発生するジレンマ

費用分担の決定過程において利己的に振舞う DMU が合理的に行動するならば、自己のベネフィットを目立たせずコストを強調するようなウェイトを選択することになる。このような行動は、実際の主体間の対立・交渉において広く観察することができる。本研究では、DEA の可変ウェイトの考え方を参考にして、以下のような最小化問題によってこの行動を模擬してみた。

$$p_{o\,\min} = \min_{u_r, v_i} \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}}{\sum_{r=1}^{s} u_r (\sum_{j=1}^{n} y_{rj}) - \sum_{i=1}^{m} v_i (\sum_{j=1}^{n} x_{ij})}$$

$$\text{subject to} \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \geq 0 \; (j = 1, \cdots, n)$$

$$u_r \geq 0 \; (r = 1, \cdots, s)$$

$$v_i \geq 0 \; (i = 1, \cdots, m).$$

上の分数計画問題の最適解は、次の線形計画問題と同値になる [2]。

$$p_{o\,\min} = \min_{u_r, v_i} \left(\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}\right)$$

$$\text{subject to} \sum_{r=1}^{s} u_r \left(\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\right) - \sum_{i=1}^{m} v_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) = 1$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \geq 0 \; (j = 1, \cdots, n)$$

$$u_r \geq 0 \; (r = 1, \cdots, s)$$

$$v_i \geq 0 \; (i = 1, \cdots, m).$$

全ての DMU が上の最小化問題を通じて自己に最も都合の良いウェイトを選択するとき、その解に関して次の定理が成立する。

定理 1

$$\sum_{j=1}^{n} p_{j\,\min} \leq 1$$

等号成立の条件は、

$$\begin{pmatrix} x_{i1} \\ y_{r1} \end{pmatrix} \propto \cdots \propto \begin{pmatrix} x_{in} \\ y_{rn} \end{pmatrix} \; (i=1,\cdots,m; r=1,\cdots,s).$$

すなわち、特殊なケースを除いて、各主体が支払っても良いと独自に考える分担率を総計しても1に到達しない。これは、「個人的合理性と社会的合理性の乖離」[3] と定義される社会的ジレンマの一種と捉えることができ、合意形成を困難にする要因となる。

2.3 最も都合の悪いウェイトについての考察

ウェイトが1つに固定されない場合には、各々のDMUは自己に最も都合の良いウェイトを選択しながらも、最も都合の悪いウェイトが採択される危険性をも考慮しなければならない。あるいは、悪いウェイトが採択されるという危険性があるが故に、各々のDMUは自己に最も都合の良いウェイトを声高に主張し、結果的に合意形成が困難になっているという側面もある。この場合の最も都合の悪いウェイトは、以下の最大化問題によって表される (制約式は省略)。

$$p_{o\,\max} = \max_{u_r, v_i} \left(\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}\right)$$

3. 提携形ゲームによる分担率の決定

各DMUが個別的に思考するときにはジレンマが発生してしまう。そこで、DMUの提携を想定し、合意形成の可能性を探ってみる。

3.1 優加法的な提携形ゲームの構築

本研究で考えるDMUの提携とは、DMUの入出力値を合計して新たなDMUを作成することと定義する。例えば、$\mathrm{DMU}_P(\mathrm{x}_{iP}, \mathrm{y}_{rP})$ と $\mathrm{DMU}_Q(\mathrm{x}_{iQ}, \mathrm{y}_{rQ})$ の提携を考える場合には、$\mathrm{DMU}_{P\cup Q}(\mathrm{x}_{iP}+\mathrm{x}_{iQ}, \mathrm{y}_{rP}+\mathrm{y}_{rQ})$ を作成する。さらに、こうして作成された提携 $\mathrm{DMU}_{P\cup Q}$ についても、以下に示す最小化問題を考える。

$$\begin{aligned} p_{P\cup Q\,\min} = \min_{u_r, v_i} \{&\sum_{r=1}^{s} u_r(y_{rP}+y_{rQ}) - \sum_{i=1}^{m} v_i(x_{iP}+x_{iQ})\} \\ \text{subject to } &\sum_{r=1}^{s} u_r(\sum_{j=1}^{n} y_{rj}) - \sum_{i=1}^{m} v_i(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}) = 1 \\ &\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \geq 0 \; (j=1,\cdots,n) \\ &u_r \geq 0 \; (r=1,\cdots,s) \\ &v_i \geq 0 \; (i=1,\cdots,m). \end{aligned}$$

ここで、$N=\{1,\cdots,n\}$(DMUの集合) に属する各提携に対する最小化問題の最適値を特性関数値であると見なした時、本研究における提携形ゲーム (N,v) を定義することができる。(N,v) の全体提携の特性関数値は1であり、さらに次の定理が成立する。

定理 2 本研究で定義した提携形ゲーム (N,v) は、以下に示す優加法性を満たす。

互いに交わらない任意の提携 S と T について、

$$v(S\cup T) \geq v(S) + v(T).$$

以上のように構築した提携形ゲームにより、シャープレイ値や仁として費用分担率が求まる。

3.2 優加法性の解釈

本研究の提携形ゲームにおける優加法性は、提携合意によって「事業成立に対して支払っても良いと考える費用」が増加し、最終的に全体合意によって共同事業に必要となる固定費用額に到達することを意味する。このことは、主体の規模が大きくなるに従って事業に対する評価値が増加する、あるいは責任感が増大することを表している。ただしこの場合には、全体提携は強制的に導かれると解釈される。

上の方法とは別に、最大化問題の最適値 $p_{\max}$ を特性関数値としたゲームを構築することも可能である。この場合には、提携によって最悪の状況が緩和されるという意味において、自発的な協力という解釈が成り立つ。

4. まとめ

本研究では、費用分担問題についての合意形成を困難にする社会的ジレンマの存在を指摘し、理論的な枠組みの中でその解決法を考案した。非常に単純化されたモデルではあるが、ジレンマの発生メカニズムを明解に記述できたことは、費用分担問題や社会的ジレンマの将来研究に際して極めて有意義であったと考える。提示した分担決定法の実際問題への適用に関しては、「領域限定法」等、更なる検討・改善が必要と成り得る。

References

[1] W.D. Cook and M. Kress, Characterizing an equitable allocation of shared costs: A DEA approach, *European Journal of Operational Research*, 119 (1999), 652-661.

[2] A. Charnes and W.W. Cooper, Programming with Linear Fractional Functionals, *Naval Research Logistics Quarterly*, 15 (1962), 333-334.

[3] 木村邦博『大集団のジレンマ』ミネルヴァ書房 (2002).

[4] W.W. Cooper, L.M. Seiford and K. Tone, *Data Envelopment Analysis — A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, Kluwer Academic Publisher, (1999).

[5] 岡田章『ゲーム理論』有斐閣 (1996).