日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

順序制約付きナップサック問題へのラグランジュ･アプローチ

02992040　防衛大学校情報工学科　*柳 秉俊　YOU Byungjun
02992050　防衛大学校情報工学科　セニスカ アミント　SENISUKA Aminto
01700900　防衛大学校情報工学科　山田 武夫　YAMADA Takeo

1　はじめに

n 個の商品 1, 2,..., n があり, 商品 i の重量と利得をそれぞれ w_i, p_i とする. これらを容量 C のナップサックに詰め込み, 総利得を最大とする問題は, ナップサック問題と呼ばれ, 多数の研究がなされている [1]. 本稿では, これに対して, 商品間に先行順序関係がある場合を考える. すなわち, ある商品を採択するには, それに先行するすべての商品が採択されていなければならないという条件が付加される場合を順序制約付きナップサック問題 (PCKP)[2] と呼び, ラグランジュ緩和に基づく解法を考える.

2　問題の定式化

有向グラフ $G=(V,E)$ において, 節点集合 $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ は商品, E は商品間の順序関係を表すとする. 順序関係の定義から, G は無閉路有向グラフ (DAG) であり, その節点はトポロジカルにソートされていると仮定してよい. 図 1 はこのような DAG の一例である.

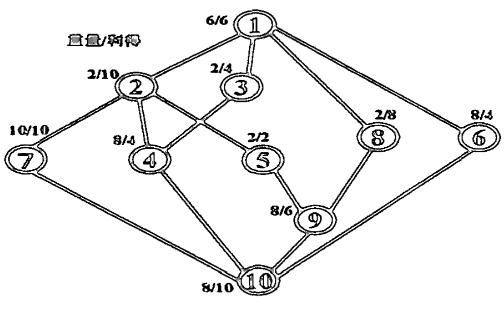

図 1: 無閉路有向グラフ上の PCKP

ここで,

$$x_i=\begin{cases}1, & \text{節点 } v_i \text{ を採択するとき,}\\ 0, & \text{そうではないとき.}\end{cases}$$

とすると, 上の問題は 0-1 整数計画問題として以下のように定式化される.

PCKP:

$$\begin{aligned}\text{maxmize}\ & \sum_{v_i\in V} p_i x_i\\ \text{subject to}\ & \sum_{v_i\in V} w_i x_i \leqq C\\ & x_i \geqq x_j, \quad \forall(v_i,v_j)\in E\\ & x_i\in\{0,1\}, \quad \forall v_i\in V\end{aligned}$$

但し, 自明なケースを除くため, 次を仮定する.

$$w_i \leqq C, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i > C$$

PCKP は $E=\emptyset$ の場合は通常のナップサック問題で, 後者がすでに $\mathcal{NP}$-困難なので, やはり $\mathcal{NP}$-困難である.

3　ラグランジュ緩和法

$(v_i,v_j)\in E$ に付随するラグランジュ乗数を $\lambda_{ij}\geqq 0$ とし, それらの全体を $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_{ij})$ とすると, ラグランジュ関数は

$$\begin{aligned}L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) &:= \sum_{j=1}^{n} p_j x_j + \sum_{(ij)\in E}\lambda_{ij}(x_i-x_j)\\ &= \sum_{j=1}^{n}(p_j+\sum_{k\in S_j^+}\lambda_{jk}-\sum_{i\in S_j^-}\lambda_{ij})x_j\end{aligned}$$

となる. ここに $S_j^+(S_j^-)$ は節点 v_j を始点 (終点) とする枝の終点 (始点) の集合を表す. $\boldsymbol{\lambda}\geqq 0$ が与えられたとき, 問題

LPCKP($\boldsymbol{\lambda}$):

$$\begin{aligned}\text{maximize}\ & L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})\\ \text{subject to}\ & \sum w_j x_j \leqq C\\ & x_j\in\{0,1\}\end{aligned}$$

の最適目的関数値を $z(\boldsymbol{\lambda})$, さらに, $0\leqq x_j\leqq 1$ と連続緩和したときのそれを $\bar{z}(\boldsymbol{\lambda})$ とすると, これらは $\boldsymbol{\lambda}$ について区分的に線形な凸関数となり,

$$z^*\leqq z(\boldsymbol{\lambda})\leqq \bar{z}(\boldsymbol{\lambda})$$

を満たす．以下では，$\bar{z}(\boldsymbol{\lambda})$ について記述するが，$z(\boldsymbol{\lambda})$ についてもほぼ同様のことが言える．

$\bar{z}(\boldsymbol{\lambda})$ は，微分可能な $\boldsymbol{\lambda}$ で，

$$\frac{\partial \bar{z}(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_{ij}} = (x_i - x_j)$$

なので，**劣勾配法**によって $\bar{z}(\boldsymbol{\lambda})$ を最小とする $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^\dagger \geqq \mathbf{0}$ を得ることが出来る．これを PCKP の**上界値** UB とする．

$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^\dagger$ における **LPCKP**$(\boldsymbol{\lambda}^\dagger)$ の解を $\boldsymbol{x}^\dagger = (x_i^\dagger)$ とすると，これを多少修正して PCKP の実行可能解が得られる．さらに，グリーディ法などにより改善した解が得られるが，この時の目的関数値を**下界値** LB とすると，最適値は LB と UB の間に存在する．すなわち，

$$LB \leqq z^* \leqq UB$$

例 1. 図 1 で C=30 とした問題についての計算結果を図 2 に示す．節点に付いた数字は $x_j^\dagger$ で，枝に付いた数字は $\lambda_{ij}^\dagger$ である．劣勾配法は $\bar{z}(\mathbf{0}) = 48$ からスタートし，2 回の反復で UB=45 となって終了した．図 2 で $x_9 \leftarrow 0$ とすると LB=40 の実行可能解 $\boldsymbol{x} = (1110101100)$ が得られる (図中の◎がこのときに採択される商品を表す)．

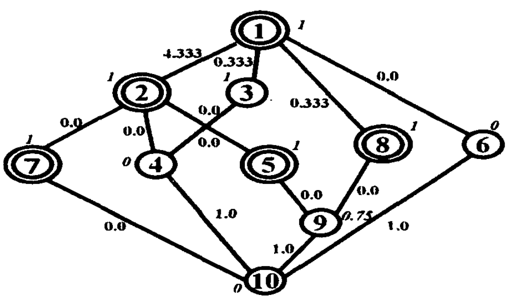

図 2: LPCKP$(\boldsymbol{\lambda}^\dagger)$ の解

4 釘付けテスト

$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^\dagger$ におけるラグランジュ緩和問題は通常の (連続型) ナップサック問題なので，**釘付けテスト** [3] により一部の変数を 0 または 1 に固定し，問題を縮小することが出来る．

今，

$$\bar{p}_j := p_j + \sum_{k \in S_j^+} \lambda_{jk}^\dagger - \sum_{i \in S_j^-} \lambda_{ij}^\dagger$$

と置き，商品が $r_j := \bar{p}_j / w_j$ の降順に並べ替えられているとする．また，商品 s が**臨界商品**であるとする．すなわち，

$$\sum_{j=1}^{s-1} w_j \leqq C < \sum_{j=1}^{s} w_j$$

ここで，

$$\theta_j := \bar{p}_j - r_s w_j$$

とすると，以下が成立する [3].

定理. PCKP の最適解 $\boldsymbol{x}^* = (x_j^*)$ において、

(i) $UB - LB < \theta_j$ ならば，$x_j^* = 1$
(ii) $UB - LB < -\theta_j$ ならば，$x_j^* = 0$

例 2. 例 1 の問題に釘付けテストを適用すると，x_1 と x_8 が 1 に固定され，これらについての順序制約を除去すると，問題は n=8, m=9 にまで縮小された．

5 まとめ

PCKP にラグランジュ緩和と釘付けテストを適用することを試みた．この方式が成功するかどうかは，短時間により良い上下界値を得ることと，釘付け方法の改善にかかっている．このうち，下界値 (近似解) についてはラグランジュ解をうまく処理して良い近似解を得る方法を検討している．また，釘付けテストでは，$x_j = 1(0)$ とすると，その節点の上流 (下流) はすべて 1(0) に固定されるので，このことを利用して通常の釘付けテストよりはるかにシャープな釘付けが出来る可能性がある．これらについて検討し，今後，さらに本格的な数値実験を行う予定である．

参考文献

[1] Martello, S., Toth, P., *Knapsack Problrems: Algorithms and Computer Implementations*, Wiley, New York (1990).

[2] Samphaiboon, N., Yamada, T., "Heuristic and exact algorithms for the precedence-constrained knapsack problem", JOTA **105** (2000), 659-676.

[3] 今野 浩, 鈴木久敏 (編), 整数計画法と組合せ最適化, 日科技連, 1982.