日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

超効率モデルにおける効率的DMU最適ウェイトの一意性

02005650 日本大学生産工学部 † 岩舘 健寛
Nihon University Iwadate Takehiro
01205220 日本大学生産工学部 篠原 正明
Nihon University Shinohara Masaaki

1 はじめに

通常のDEAによる解析では，非効率的DMUでは最適ウェイトが一意的に定まるとされるが，効率的DMUでは最適ウェイトが一意に定まらないことが知られている．本研究は，[1]で提案した相対効率モデルを，[2]で提案した相対超効率 S_o-CCRI-SuperEfficiency モデル列挙型解法によって，効率的DMU最適ウェイトの一意性の，数値計算実験を通しての検証を行う試みである．

2 記号等

x_o ： DMU$_o$ の入力データベクトル
v ： DEAによる入力評価ベクトル
c ： 相対効率法による入力評価ベクトル
y_o ： DMU$_o$ の出力データベクトル
u ： DEAによる出力評価ベクトル
b ： 相対効率法による出力評価ベクトル
θ_o ： DEA法によるDMU$_o$ の効率値
S_o ： 相対効率法によるDMU$_o$ の効率値

ここで，m 入力 s 出力のシステムに対して，m 次元ベクトル x, v, c の各要素は $0 \leq x_j, 0 \leq v_j, 0 < c_j \leq 1$，$s$ 次元ベクトル y, u, b の各要素は $0 \leq y_j, 0 \leq u_j, 0 < b_j \leq 1$，を仮定する．

3 相対超効率モデル列挙型解法

相対効率モデルとは個別DMU$_o$ の絶対効率値 z_o を用いて，対象DMU群の一般相対効率値 S_o を以下の(2)式で定義したものである．

$$z_o = \frac{b^T y_o}{c^T x_o} \qquad (1)$$

$$S_o = \frac{\text{対象 DMU 群の絶対効率値}}{\text{基準とする絶対効率値}} \qquad (2)$$

相対効率モデルにおいて，分子を個別DMUの絶対効率値，分母を個別DMUの最大絶対効率値とすれば，S_o はDEA-CCRIモデルでのDMU$_o$ の効率値 θ_o と一致する．また，分母を自己を除く個別DMUの最大絶対効率値とすれば，S_o はDEA-CCRI-SuperEfficiencyモデルでのDMU$_o$ の効率値 θ_o と一致する．

[S_o-CCRI]

$$\text{目的関数} \quad S_o = \frac{\frac{b^T y_o}{c^T x_o}}{\max_j \frac{b^T y_j}{c^T x_j}} \longrightarrow max \qquad (3)$$

$$\text{制約式} \quad 0 \leq c \leq 1, \quad 0 \leq b \leq 1$$

[S_o-CCRI-SuperEfficiency]

$$\text{目的関数} \quad S_o = \frac{\frac{b^T y_o}{c^T x_o}}{\max_{j \neq o} \frac{b^T y_j}{c^T x_j}} \longrightarrow max \qquad (4)$$

$$\text{制約式} \quad 0 \leq c \leq 1, \quad 0 \leq b \leq 1$$

また，与えた相対効率評価 c, b と等価なDEA評価 v, u の関係は次式(5),(6)である．

$$v = \frac{1}{c^T x_o} c \qquad (5)$$

$$u = \frac{s_o}{b^T y_o} b \qquad (6)$$

相対効率法の入出力ベクトル c, b の実現可能区間を，各入出力項目について任意の N 区間に分割し，$n(N+1)^{(m+s)}$ 個のウェイトを生成して計算を行う方法を列挙型解法という．

例えば表1のように,2入力2出力のシステムに対し，各入出力ウェイトを100分割して計算を行えば，計算回数は $(100+1)^{(2+2)}$ で約1億個のウェイトの生成を行なうこととなる．

表 1: 実験データ

	x_1	x_2	y_1	y_2
DMU_1	20	151	100	90
DMU_2	19	131	150	50
DMU_3	25	160	160	55
DMU_4	27	168	180	72
DMU_5	22	158	94	66
DMU_6	55	255	230	90

4 重複除去列挙型解法

相対超効率モデル列挙型解法では, DEA の LP 解法の $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}_o = 1$ に相当する制約が存在しないため, $\boldsymbol{c}^*, \boldsymbol{b}^*$ の組と同じ効率値を与えるウェイトである $k\boldsymbol{c}^*, k\boldsymbol{b}^*$ を計算してしまい, 一意性の判定の邪魔になる恐れがある. そのため,「列挙型解法」と, 重複したウェイトベクトルである $k\boldsymbol{c}^*, k\boldsymbol{b}^*$ を除去した列挙型解法である「重複除去列挙型解法」の両方を用いて, 相対超効率モデルにおける効率的 DMU 最適ウェイトの一意性の検証を行う.

5 実験結果

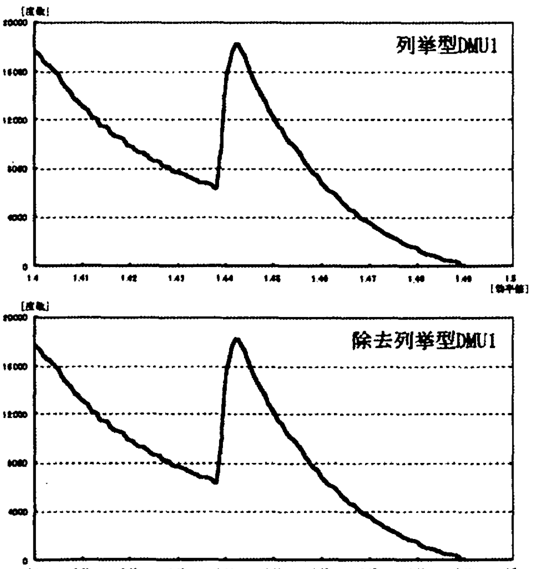

図 1: S_o-CCRI-SuperEfficiency 列挙型解法と重複除去列挙型解法による DMU1 の最適効率値付近の効率値-度数の関係

両アルゴリズムとも, 図 1 より最適効率値に向かって効率値度数が減少してゆくこと, また, 最適効率値を示した度数が 1 であることも確認された.

以上より, 超効率モデルでは, 最適ウェイトが一意であることが実験的に確認できたと言える.

6 理論的考察

(3),(4) 式の相対効率モデルに従い, 実験結果を解釈する.

(3) 式では, S_o-CCRI モデルの分母である, 絶対効率値の最大値を示す DMU が DMU_o 自身であるときに, 効率値 1 を示す. そのため,DMU_o の絶対効率値が全 DMU 集合中最大の絶対効率値である範囲で, 最適ウェイトに自由度が存在している. CCRI モデルにおいて, 効率的 DMU の最適ウェイトが一意に定まらないのはこのためである.

それに比べて,(4) 式では, 相対効率値の分母に DMU_o 自身を選択することを許さないため, 最適ウェイトに対する参照超平面が一意に定まることとなる.

7 おわりに

列挙型解法, 重複除去列挙型解法の両方で最適ウェイトが一意であることが確認できた. また, 結果の理論的考察も行った.

今後の展開としては, スラックを考慮した相対効率モデルへの拡張, 相対効率モデルにおける BCC モデル, などが考えられる.

参考文献

[1] 相対効率モデルによる DEA モデルの表現ならびにモンテカルロ法による効率値計算: 岩楯健寛, 篠原正明,2003 年秋季研究発表会アブストラクト集,(社) 日本オペレーションズ・リサーチ学会,pp324-325,9,2003.

[2] 効率的 DMU 最適ウェイトの一意性に関する考察: 岩楯健寛, 篠原正明, 第 36 回日本大学生産工学部学術講演会数理情報部会講演概要,pp93-96,12,2003.