日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

ボラティリティ変動を考慮した アメリカン・プット・オプションのプライシングモデル

早稲田大学 *鈴木 大輔 SUZUKI Daisuke
東京富士大学 田畑 智章 TABATA Tomoaki
01008370 早稲田大学 大野 髙裕 ONO Takahiro

1 はじめに

Black and Scholes [1]（以下，B-S モデル）の登場によりオプション・プライシング理論や実証研究は飛躍的に発展した．

しかし B-S モデルは現実にはない多くの厳しい仮定をおいている．その中でも重要な仮定として，対象がヨーロピアン・オプションであるということと，原資産価格のボラティリティが一定であるということが挙げられる．ところが現実の市場において，欧米の取引所ではアメリカン・オプションの取引が大部分を占めている．また原資産価格のボラティリティは過去の多くの実証研究により確率的に変動していることが経験的な事実として知られている．これら 2 つの市場の現状を 1 つずつ考慮した従来研究は数多く存在するが，2 つを同時に考慮した研究は見受けられない．

そこで本稿では，アメリカン・オプションにおいてボラティリティ変動を考慮することにより，市場の特徴をよりよく表現した B-S モデルの拡張を目的とする．

2 従来研究

2.1 アメリカン・オプション

Kim [4] の研究等によって，アメリカン・オプションにおいて早期行使が最適となる原資産価格の境界値である早期行使境界の存在が確認され，早期行使があり得るアメリカン・プット・オプションのプレミアム P は，B-S モデルによるヨーロピアン・プット・オプションのプレミアム p と早期行使の権利がもたらす付加価値である早期行使プレミアム P_E の和として，(1) 式のように表現できることが示されている．

$$P = p + P_E \tag{1}$$

2.2 早期行使境界関数

早期行使プレミアム P_E の定式化に必要である早期行使境界は，具体的な関数としては導出されていなかった．しかし，原資産価格が早期行使境界に達した時点において，アメリカン・プット・オプションは即座に行使されるため，プレミアムは残存時間に依存しないことになる．このことから Bunch and Johnson [2] は，(1) 式のプレミアムを残存時間で微分して 0 となる原資産価格が早期行使境界であると考え，近似解法により早期行使境界関数を導出した．

2.3 ボラティリティ変動モデル

Heston [3] は，ボラティリティ変動過程に平均回帰過程を適用し，ボラティリティ変動を考慮したヨーロピアン・オプションのプライシングモデルを構築した．

3 モデル

3.1 準備

アメリカン・プット・オプションにボラティリティ変動を考慮した場合も，(1) 式と同様にそのプレミアムが分解式で表現することが可能であり，この (1) 式の p と P_E の 2 つのプレミアムにボラティリティ変動を考慮する．ヨーロピアン・プット・オプションのプレミアム p については，Heston のモデルを適用する．また早期行使プレミアム P_E については，ボラティリティ変動を考慮した早期行使境界関数を導出してから定式化する．その際，ボラティリティの変動に対してその期待値を利用できるという考えに基づいて定式化を行なう．

以下，S_0 は原資産 S_t の初期価格，X は権利行使価格，r はリスクフリーレート，$\tilde{\sigma}_t$ は S_t のボラティリティ，T は満期時点，τ は満期までの残存時間，k は回帰速度，θ は回帰レベル，ν は $\tilde{\sigma}_t$ のボラティリティ，W はウィーナー過程，B_t は早期行使境界とする．また，本稿において適用する原資産価格過程とボラティリティ変動過程は Heston と同様に以下とする．

$$dS_t = (r - \tilde{\sigma}_t^2/2)S_t dt + \tilde{\sigma}_t S_t dW_1 \tag{2}$$

$$d\tilde{\sigma}_t^2 = k(\theta^2 - \tilde{\sigma}_t^2)dt + \nu\tilde{\sigma}_t dW_2 \tag{3}$$

3.2 早期行使境界関数

原資産価格が早期行使境界に達する時点においては，オプションはイン・ザ・マネーである．イン・ザ・マネーのオプションプレミアムはボラティリティに依存しない本源的価値が大きく，ボラティリティに依存する時間価値が小さいため，ボラティリティが変動してもプレミアムの変動は微小である．さらにボラティリティが等しい割合で上下したときのプレミアムの変化率が等しいことから，早期行使境界関数導出のためには，(3) 式の期待値で考えることができる．したがって，Bunch and Johnson における近似解法に基づき，(1) 式中のボラティリティに (3) 式の期待値を適用したプレミアムを微分して 0 となる原資産価格を新たな早期行使境界として，(4) 式の関数を導出できる．

$$B_\tau^* = X\exp\{-(r + \hat{\sigma}_\tau^2/2)\tau - g^*\hat{\sigma}_\tau^2\sqrt{\tau}\} \tag{4}$$

$$g^* \approx \sqrt{\ln\frac{\alpha^* Z}{4er^2\tau}}, \quad \alpha^* \approx 1 - \frac{\frac{1}{2}(\frac{\gamma^*}{1+\gamma^*})^2}{1 + \frac{(1+\gamma^*)^2}{4}\hat{\sigma}_\tau^2\tau}$$

$$\gamma^* = 2r/\hat{\sigma}_\tau^2, \quad Z = 2b'_\tau\hat{\sigma}_\tau\tau + \hat{\sigma}_\tau^2$$

$$\hat{\sigma}_\tau^2 = \mathrm{E}[\tilde{\sigma}_\tau^2] = \theta^2 + (\tilde{\sigma}_0^2 - \theta^2)e^{-(T-\tau)}$$

3.3 早期行使プレミアム

早期行使プレミアムは，早期行使によって得られる利益についての現時点から満期までの積分である．実

際に (3) 式のサンプルパスから得られる積分値と，(3) 式の期待値から得られる積分値はほぼ等しい．したがって，(1) 式の P_E 中のボラティリティに (3) 式の期待値を適用することができ，これと (4) 式の新たな早期行使境界関数を用いて，ボラティリティ変動を考慮した早期行使プレミアムは (5) 式のように定式化できる．

$$P_E^* = \int_0^\tau rXe^{-r(T-u)}N(-d_E^*)du \tag{5}$$

$$d_E^* = \frac{\ln(S/B_u^*) + (r - \hat{\sigma}_u^2/2)u}{\hat{\sigma}_u\sqrt{u}}$$

3.4 オプションプライシングモデル

ボラティリティ変動を考慮したアメリカン・プット・オプションのプレミアム P^* は (6) 式である．(7) 式は Heston のモデルによるボラティリティ変動を考慮したヨーロピアン・プット・オプションのプレミアムである．Q_1, Q_2 はモデル独自のパラメータであり，詳細は Heston [3] を参照されたい．

$$P^* = p^* + P_E^* \tag{6}$$

$$p^* = Xe^{-r\tau}Q_2 - SQ_1 \tag{7}$$

4 数値実験

ボラティリティを一定としている従来研究とボラティリティ変動を考慮した本稿の提案モデルを比較・検討する．各パラメータは，$X = 10000$, $r = 0.01$, $\tilde{\sigma}_0 = 0.25$, $k = 2$, $\nu = 0.3$, $\tau = 0.25$ とする．

4.1 早期行使境界

図 1 において $\tilde{\sigma}_0 < \theta$ の場合は，早期行使境界はボラティリティが一定の場合と比較して下方に位置している．また $\tilde{\sigma}_0 > \theta$ の場合は，$\tilde{\sigma}_0 < \theta$ の場合とは逆の結果が得られ，$\tilde{\sigma}_0 = \theta$ の場合はボラティリティを一定としている従来研究の早期行使境界と等しくなっている．

4.2 オプションプレミアム

図 2 はボラティリティを変動させたアメリカン・プット・オプションのプレミアムからボラティリティが一定のプレミアムを引いたものである．$\tilde{\sigma}_0 < \theta$ の場合，オプションプレミアムはボラティリティが一定の場合と比較して高くなっている．また $\tilde{\sigma}_0 > \theta$ の場合は，$\tilde{\sigma}_0 < \theta$ の場合とは逆の結果が得られ，$\tilde{\sigma}_0 = \theta$ の場合はオプションの状態により変動している．これらの結果は Heston のヨーロピアン・オプションに対するボラティリティ変動モデルと同様の傾向になっている．

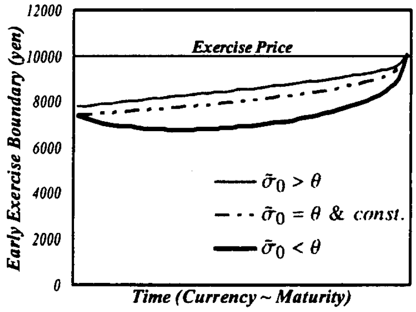

図 1: 早期行使境界の挙動

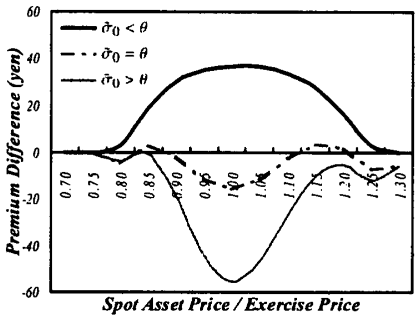

図 2: オプションプレミアムの変動

5 考察

図 1 において $\tilde{\sigma}_0 < \theta$ の場合，すなわちボラティリティが回帰レベルへの上昇傾向にあるとボラティリティは初期値より大きくなりやすくなる．一般的にボラティリティが大きくなるとオプションプレミアムが高くなる．したがってオプションを保持しているインセンティブが高くなるため，早期行使境界は下方に位置すると考えられる．

$\tilde{\sigma}_0 < \theta$ の場合，早期行使プレミアムは低くなっているが，図 2 のようにオプションプレミアムは高くなっている．このとき，早期行使境界は下方に位置することから，早期行使の可能性が低下するため，早期行使プレミアムは低くなる．また，Heston の結果からヨーロピアン・プット・オプションのプレミアム p^* が高くなることがわかっているが，この影響が早期行使プレミアム P_E^* の影響よりも大きいため，全体としてアメリカン・プット・オプションのプレミアム P^* が高くなっていると考えられる．

6 結論

本稿では，原資産価格のボラティリティの変動を考慮したアメリカン・オプションのプライシングモデルを提案した．これにより，市場の特徴をよりよく表現したオプションのプライシングを行なうことが可能となった．

7 今後の課題

- 早期行使境界関数の新たな導出方法の提案
- 境界値の存在する問題への応用

参考文献

[1] F. Black and M. Scholes: The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, **81** (1973) 637-654.

[2] D. S. Bunch and H. Johnson: The american put option and its critical stock price. *Journal of Finance*, **55** (2000) 2333-2356.

[3] S. L. Heston: A Ccosed form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, **6** (1993) 327-343.

[4] I. J. Kim: The analytic valuation of american options. *Review of Financial Studies*, **3** (1990) 547-572.