

ボール保持)にあるときのチーム1の勝点の期待値を表す関数とする。このとき、すこし手前の残り時間 $t+\Delta t$ の時点の $E_1(r|t+\Delta t)$ ならびに $E_2(r|t+\Delta t)$ と比較すれば、 $t+\Delta t$ から t の間に、一方が得点するか、ボール保持が移行するか、ボール保持のままかのいずれかとなるから、それぞれの推移確率を当てはめると、

$$\begin{aligned} E_1(r|t+\Delta t) &= E_2(r+1|t) \cdot a\Delta t + E_2(r|t) \cdot c\Delta t + E_1(r|t) \cdot \{1-(a+c)\Delta t\} \\ E_2(r|t+\Delta t) &= E_1(r-1|t) \cdot d\Delta t + E_1(r|t) \cdot b\Delta t + E_2(r|t) \cdot \{1-(b+c)\Delta t\} \end{aligned} \quad (2)$$

となる。なお、勝点は試合の勝者に3点、敗者に0点、引き分け時は双方1点が与えられる。よって、1試合を通して推移率が一定とすると、 $r>0$ のとき $E_1(r/0)=E_2(r/0)=3$ 、 $r<0$ のとき $E_1(r/0)=E_2(r/0)=0$ 、 $r=0$ のとき $E_1(r/0)=E_2(r/0)=1$ という境界条件で(2)式を解けば、残り時間 t で得点差 r の時の勝点の期待値が求まる。

ここで更に、選手交代による布陣変更で、試合中に攻撃・防御の形式を意図的に変更できるとしよう。本稿では簡単のため、一方のチームのみ布陣変更でき、一旦変更したら、更なる選手交代でしか布陣を戻せないという前提で、最適な布陣変更策を定式化する。

地元チーム1が、布陣 F-C-D-A-S (F:フルバック, C:センターバック, D:防御型ミッドフィルダ, A:攻撃型ミッドフィルダ, S:ストライカーの選手数とし 2-2-3-2-1などと表記する)にて試合開始し、任意の時点で他の布陣に変更できるとする。また、各布陣での推移率 a, b, c, d を布陣 F-C-D-A-S の関数とする。

いま布陣 F-C-D-A-S を選択しており、時刻 t で r 点リードしているとしよう。ここで、残り時間内で最適な布陣変更したときの勝点の期待値を $E_1(r, t, F-C-D-A-S, 3)$ とする。最後の3は、可能な選手交代の数を示しており、プレミアリーグでは1試合3人までという制約による。

監督は、時刻 t で布陣 F-C-D-A-S を継続するか、変更するかの選択ができる。布陣 F-C-D-A-S からの1回での変更は、Fを1人増やしCを減らすなど、全部で20通りある。よって、時刻 t と時刻 $t+\Delta t$ で比較すると、定義より以下の式をみたま(右辺第2・3項は略記している)。

$$\begin{aligned} E_1(r, t+\Delta t, F, C, D, A, S) = & \begin{cases} E_1(r+1, t-\Delta t, F, C, D, A, S) \cdot \alpha F, C, D, A, S \Delta t + E_1(r, t, \dots, 3) \cdot c\Delta t + E_1(r, t, \dots, 2) \cdot \{1-(a+c)\Delta t\} \\ \text{時刻}t\text{で選手交代しない場合} \\ E_1(r+1, t-\Delta t, F-1, C+1, D, A, S) \cdot \alpha F-1, C+1, D, A, S \Delta t + E_1(r, t, \dots, 2) \cdot c\Delta t + E_1(r, t, \dots, 2) \cdot \{1-(a+c)\Delta t\} \\ \text{時刻}t\text{で}F\text{から}C\text{に交代した場合} \\ \max E_1(r+1, t-\Delta t, F-1, C, D+1, A, S) \cdot \alpha F-1, C, D+1, A, S \Delta t + E_1(r, t, \dots, 2) \cdot c\Delta t + E_1(r, t, \dots, 2) \cdot \{1-(a+c)\Delta t\} \\ \text{時刻}t\text{で}F\text{から}D\text{に交代した場合} \\ \dots\dots\dots \\ E_1(r+1, t-\Delta t, F, C, D, A+1, S-1) \cdot \alpha F, C, D, A+1, S-1 \Delta t + E_1(r, t, \dots, 2) \cdot c\Delta t + E_1(r, t, \dots, 2) \cdot \{1-(a+c)\Delta t\} \\ \text{時刻}t\text{で}S\text{から}A\text{に交代した場合} \end{cases} \quad (3) \end{aligned}$$

$E_1(r, t, F-C-D-A-S, 2)$ 、 $E_1(r, t, F-C-D-A-S, 1)$ についても同様の式が成り立つ。ただし、 $E_1(r, t, F-C-D-A-S, 0)$ は、残り時間で交代できないので、以下のようになる。

$$\begin{aligned} E_1(r, t+\Delta t, F, C, D, A, S) = & E_1(r+1, t-\Delta t, F, C, D, A, S) \cdot \alpha F, C, D, A, S \Delta t + E_1(r, t, \dots, 0) \cdot c\Delta t + E_1(r, t, \dots, 0) \cdot \{1-(a+c)\Delta t\} \quad (4) \end{aligned}$$

$E_2(r, t, F-C-D-A-S, i)$ ($i=0\sim 3$)についても同様の式が成り立つ。これらの方程式を解くことで、勝点を最大化する布陣変更策を決定することができる。

4. 2 応用例

例として、中堅チーム X が、シーズンで主に用いた5

つの布陣を選択できるという条件で、上位チーム Y との地元戦を想定した際の布陣変更策について述べる。この試合におけるチーム X の各布陣とチーム Y の強さの指標は、シーズンでの記録を基に、前節の方法で最尤推定し、その値を(1)式の説明因子の方に代入することで推移率を推定した。得られた推移率を表2の左側に示している。同表より、得点の観点からは、布陣2(2-2-1-3-2)が、最も攻撃的であり、布陣3(2-2-2-3-1)が最も防御的と言えるが、ボール保持の観点も考慮して評価しなくてはならず、どの布陣をどのように利用するのが最適か、計算機の助けなしに判断することは難しい。

表2. 地元戦での推移率の推定値と勝点の期待値

布陣	a	b	c	d	期待値	備考
1(2-2-2-2-2)	0.0373	3.46	2.95	0.0463	1.408	
2(2-2-1-3-2)	0.0625	3.32	3.09	0.0650	1.428	最適
3(2-2-2-3-1)	0.0242	4.04	3.16	0.0285	1.408	
4(2-2-3-1-2)	0.0448	3.35	2.80	0.0448	1.381	
5(1-2-2-3-2)	0.0381	4.22	3.23	0.0352	1.408	

(2)(3)式を数値的に解き、試合開始時の勝点の期待値 $E_1(0, 90, F-C-D-A-S, 3)$ を求めた結果を表2の右側に示している。布陣2(2-2-1-3-2)が開始の布陣として最適である。

布陣2以降の最適な布陣変更策を表3に示す。変更の時刻や点差は割愛するが、大まかに言えば、布陣2で開始し、一旦リードしたら布陣3に変更し、もし追いつかれたら布陣2に戻すというのが最適な布陣変更策となる。

この結果は、試合でリードしたならば、試合終了前のあるタイミングで、より防御的な戦術に変更したほうがよい、という直感的なイメージとも一致する。

表3. 最適な布陣変更策

-S+D	-D+S	-S+D
2(2-2-1-3-2) → 3(2-2-2-3-1) → 2(2-2-1-3-2) → 3(2-2-2-3-1)	-F+D	-D+F
	-D+F	-S+D
	→ 5(1-2-2-3-2) → 2(2-2-1-3-2) → 3(2-2-2-3-1)	

5. おわりに

以上、サッカーへのマルコフモデルの応用について述べた。今後は相手チームの選手交代も考慮したモデルや、さらに細かい状態も組み入れたモデルの構築へと展開していきたい。

参考文献

- [1] J.M.Norman: Soccer. In J.Bennett (ed.): *Statistics in sport* (Arnold, London, 1998).
- [2] 廣津, ライト: サッカーの試合における戦術変更と反則のタイミング決定へのポアソンモデルの応用. 2003年日本OR学会春季研究発表会アブストラクト集, (2003) 234-235.
- [3] A.J.Lee: Modeling Scores in the Premier League: Is Manchester United Really the Best?. *Chance* 10 (1997) 15-19.
- [4] N.Hirotsu and M.Wright: An evaluation of characteristics of teams in association football by using a Markov process model. *The Statistician* 52 (2003) 591-602.
- [5] Opta Index Limited: *The Opta Football Yearbook: 2000-2001* (Carlton Books, London, 2000).
- [6] N.Hirotsu and M.Wright: Determining the best strategy for changing the configuration of a football team. *Journal of the Operations Research Society* 54 (2003) 878-887.