日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

価値配置の不明な場合に対処するコスト制約付き整数資源配分問題

02402060　防衛大学校　*長嶋　真一　NAGASHIMA Shinichi
01504810　防衛大学校　宝崎　隆祐　HOHZAKI Ryusuke
01110110　防衛大学校　小宮　享　KOMIYA Toru

1．はじめに

資源配分問題はさまざまな分野に適用例をもち，外交・軍事面における査察問題やミサイル割当問題等には過去に多くの研究がある[1]．ここではミサイル割当問題を一例として取り上げ，価値の配置に関する相手の戦略が不明である場合に，割当者側の立場から合理的なミサイル割当をミニマックス手法を用いて求め，費用対効果を考慮した最適計画を立案する手法を提案する．

2．問題の前提と定式化

(1) 防者は敵対する攻者のミサイル攻撃から，所有する全体価値Vを防護すべく，全部でT個ある防護施設にVを分散して格納することを考えている．Vは任意の大きさに分割可能であるとし，防護施設$i \in I \equiv \{1,\cdots,T\}$に格納する価値を$v_i$とする．このとき防者の戦略を$\{v_i\}$で定義する．

(2) 攻者は特性の異なるmタイプのミサイルを有しており，防護施設iに指向させるタイプ$j \in J \equiv \{1,\cdots,m\}$のミサイルの割当数を$x_{ij}$とする．$j$タイプミサイル1発の製造・使用に要するコストを$c_j$とし，攻者は全体で使用可能な総コスト$C$を有する．ここで攻者の戦略を$\{x_{ij}\}$で定義する．

(3) 防護施設iに対するjタイプミサイル1発による撃破確率（単発撃破確率）を$\beta_{ij} = 1 - \exp(-\alpha_{ij})$，$\alpha_{ij} > 0$とする．防護施設$i$が撃破されれば，格納されている価値$v_i$も同時に失われる．

(4) 防者は，攻者のミサイル割当計画の情報を事前に正確に察知ことができるが，逆に防護施設に格納される価値$\{v_i\}$は攻者に察知されることはないものとする．

(5) 防者の目的は全体価値の残存期待値を最大にすることであり，他方，攻者の目的はできるだけ少ないコストでこれを最小にすることであるとする．

上述の(1)～(5)の前提により，価値Vの残存期待価値は$\sum_{i=1}^{T} v_i \exp\left(-\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} x_{ij}\right)$と書けるから，本問題は次のミニマックス問題(P0)として定式化される．ここでZ^+は非負整数の集合である．

$$\text{(P0)}\quad \min_{\{x_{ij}\}\in A} \max_{\{v_i\}\in D} \sum_{i=1}^{T} v_i \exp\left(-\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} x_{ij}\right).$$

$$A \equiv \left\{ \{x_{ij}, i \in I, j \in J\} \,\middle|\, \sum_{i \in I}\sum_{j \in J} c_j x_{ij} \le C, x_{ij} \in Z^+, i \in I, j \in J \right\}$$

$$D \equiv \left\{ \{v_i, i \in I\} \,\middle|\, \sum_{i \in I} v_i = V, v_i \ge 0, i \in I \right\}.$$

3．問題の解法

途中の変形過程は省略するが，前章で定式化された問題(P0)は次のマックスミン問題(P1)に帰着され，(P0)の最適値は$F^* = V / \exp(\rho^*)$で与えられる．

$$\text{(P1)}\quad \rho^* = \max_{\{x_{ij}\}\in A} \min_{i \in I} \left\{ \sum_{j \in J} \alpha_{ij} x_{ij} \right\}.$$

また，(P1)の最適解を$\{x_{ij}^*\}$とし，記号$\rho_i \equiv \sum_{j\in J} \alpha_{ij} x_{ij}^*$，$i \in I$を使えば，防者の最適戦略$\{v_i^*\}$は$\rho_k = \rho^*$なる防護施設$k$以外には価値を格納しないことである．

以下では問題(P1)における最適値を得るための厳密解法を示す．なお，c_jのjに関する最小値を$c^{\min}$とすれば，$Tc^{\min} > C$の場合は自明な最適値として0が求まるので，以下では$Tc^{\min} \le C$の場合における解法を示す．

3.1　動的計画法

ある防護施設$n \in I$に対するコスト$Q_n = 1,\cdots,C$での整数ナップサック問題$\mathrm{IKP}_n(Q_n)$を次式で定義する．

$$\mathrm{IKP}_n(Q_n):\ \max_{\{x_{nj}, j\in J\}} \left\{ \sum_{j=1}^{m} \alpha_{nj} x_{nj} \,\middle|\, \sum_{j=1}^{m} c_j x_{nj} \le Q_n, x_{nj} \in Z^+, j \in J \right\}.$$

防護施設の集合$\{1,\cdots,n\}$に対する総コストyの制約下での最適値を

$$\rho_n^{opt}(y) = \max_{\{x_{ij}\}} \min_{i=1,\cdots,n} \left\{ \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} x_{ij} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_j x_{ij} \le y, x_{ij} \in Z^+, i = 1,\cdots,n, j \in J \right\}$$

とする．ここで$\mathrm{IKP}_n(Q_n)$の最適値，すなわち整数ナップサック関数を$\rho_n(Q_n)$と書けば，$nc^{\min} \le y$なるyに対し次の再帰関係式が導かれる．

$$\rho_n^{opt}(y) = \max_{Q_n \in S} \min\{\rho_n(Q_n),\ \rho_{n-1}^{opt}(y - Q_n)\},$$

初期値：$\rho_n^{opt}(y) = 0,\ y = 0,\cdots,nc^{\min} - 1,$

$\rho_1^{opt}(y) = \rho_1(y).$

ただし，$S \equiv \{c^{\min}, c^{\min}+1,\cdots, y-(n-1)c^{\min}\}$である．

この再帰関係式を逐次計算してゆき，$\rho_T^{opt}(C)$を求めたものが最適値ρ^*となる．

3.2　事前判定法

通常，整数ナップサック関数$\rho_i(Q_i)$はQ_iに対し増加ステップ関数となるが，既存の手法によって$\rho_i(Q_i)$，$Q_i = 1,\cdots,C$，$i \in I$を求める過程において，$\rho_i(Q_i)$が上

昇する Q_i を昇順に順序付けしたものを $Q_i^{inc}(p_i)$，$p_i = 1,\cdots,\tau_i$，$i \in I$ として記憶しておく．以下ではこの $\{Q_i^{inc}(p_i)\}$ を利用した解法を示す．

ステップ1：$p_i := 1$，$i \in I$，$y := Tc^{\min}$ とする．

ステップ2：$K \equiv \{k | \rho_k(Q_k^{inc}(p_k)) = \min_{i \in I} \rho_i(Q_i^{inc}(p_i))\}$ の要素を順序付けした添字 k を $k(l), l = 1,\cdots,|K|$ とする．
$|K| > C - y$ なら $\rho^* := \rho_{k(1)}(Q_{k(1)}^{inc}(p_{k(1)}))$ として終了．

ステップ3：$s := \sum_{l=1}^{|K|}(Q_{k(l)}^{inc}(p_{k(l)}+1) - Q_{k(l)}^{inc}(p_{k(l)}))$ とする．
$y + s \le C$ ならば，すべての $l = 1,\cdots,|K|$ に対し $p_{k(l)} := p_{k(l)} + 1$ とする．さらに $y := y + s$ とし，$y < C$ ならステップ2へ，$y = C$ なら $\rho^* := \min_{i \in I} \rho_i(Q_i^{inc}(p_i))$ として終了．
$y + s > C$ ならば $\rho^* := \rho_{k(1)}(Q_{k(1)}^{inc}(p_{k(1)}))$ として終了．

4．数値例

ここでは4つの防護施設のある例について，できるだけ費用対効果の大きい攻者のミサイル導入計画を考えてみる．基本計画において導入の対象となっているミサイルは，ある特定の防護施設に対しては高い効果を発揮するが他の防護施設に対してはほとんど効果がない比較的高価な特殊ミサイル(タイプ 1～4)と，どの防護施設に対しても同じように低い効果しかないが比較的安価な汎用ミサイル(タイプ 5)とがあり，単発撃破確率 β_{ij} と単価 c_j は表1のような値を持つ．

表1：基本計画におけるパラメータ

β_{ij}		ミサイルタイプ j				
		1	2	3	4	5
防護施設番号 i	1	0.60	0.01	0.01	0.01	0.20
	2	0.01	0.60	0.01	0.01	0.20
	3	0.01	0.01	0.60	0.01	0.20
	4	0.01	0.01	0.01	0.60	0.20
c_j		5	6	7	8	4

また，ミサイルの製造・導入にあたっては次の4つの代替計画を採用することが可能であるとする．

- 計画 SU：タイプ $j = 1,2,3,4$ のミサイル単価を1単位増加し，性能 $\alpha_{ij}(i = j)$ を向上させる．
- 計画 GU：タイプ $j = 5$ のミサイル単価を1単位増加し，性能 $\alpha_{ij}(j = 5)$ を向上させる．
- 計画 SD：タイプ $j = 1,2,3,4$ のミサイル単価を1単位減少させ，性能 $\alpha_{ij}(i = j)$ も低下させる．
- 計画 GD：タイプ $j = 5$ のミサイル単価を1単位減少させ，性能 $\alpha_{ij}(j = 5)$ も低下させる．

ここで性能 α_{ij} は，単価1単位の増加に対しては $\alpha_{ij}(1 + 1/c_j + 1)$ で向上し，減少に対しては $\alpha_{ij}(1 - 1/c_j - 1)$ で低下するものと仮定する．このとき基本計画以外の各計画における β_{ij} の変化は次の表2のようになる．表中の記号「－」は基本計画からの変化がないことを示す．

表2：各計画における β_{ij}

	β_{11}	β_{22}	β_{33}	β_{44}	β_{i5}，$i = 1,2,3,4$
計画 SU	0.657	0.649	0.643	0.639	－
計画 GU	－	－	－	－	0.235
計画 SD	0.497	0.520	0.534	0.544	－
計画 GD	－	－	－	－	0.138

基本計画を含めた5つの計画の残存期待価値の減少率 F^*/V(%)のグラフを図1に示す．横軸は使用可能な総コスト C を示す．各 C において値が最小となる計画を採用するのが最適計画となる．図1を見ると C が 20 では汎用ミサイルの，30～38 では特殊ミサイルの性能向上を行うべきであるが，それ以外は基本計画のままか，或いは性能を落としてでも単価を下げるほうがよいことが分かる．

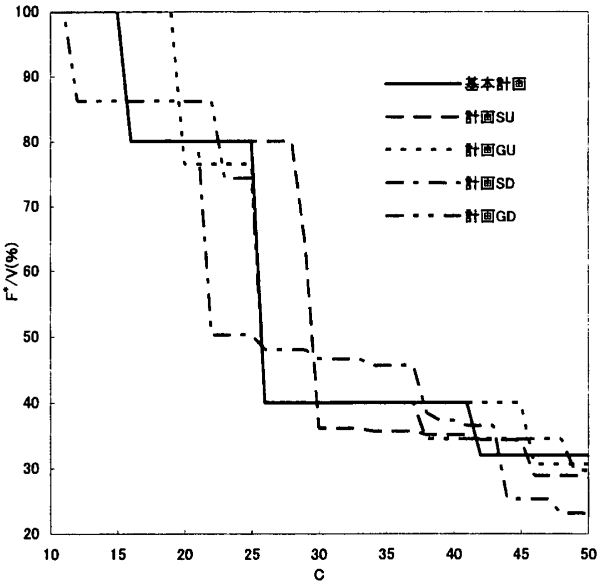

図1：F^*/V の変化

5．おわりに

本研究では上述した2つの厳密解法以外にも逐次増分法と呼ぶ厳密解法と1つの近似解法を提案した．数値実験では各厳密解法の計算時間についての比較を行うとともに，近似解法の相対誤差に関する評価も行っている．その結果，c_j に比べ総コスト C が大きな場合の近似解法の有用性についても確認できた．

参考文献

[1] R. Hozaki and K. Iida, An Integer Resource Allocation Problem With Cost Constraint, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 41(1998), pp.470-482.