

## 集団AHPにおけるCIの性質

01792180 静岡大学工学部 \* 八巻直一 YAMAKI Naokazu

### 1 概要

集団AHPにおいて、 $k$ 番目の評価者の一対比較行列を  $X_k = (x_{ij}^k)$  とし、評価項目数を  $n$  および評価者数を  $m$  とする。このとき、Saaty は集団の合意による一対比較行列を、次のように導出することを提案している。

$$X = (x_{ij}) \quad , i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} = \left( \prod_{k=1}^m x_{ij}^k \right)^{1/m}$$

このとき、上田 [1] は、各評価者による一対比較行列の整合度に対して、合意結果の一対比較行列の整合度がある意味で小さくなる、と予想している。本稿では、整合度を再定義し、かつ重要度ベクトルを幾何平均法で求めた場合、上田の予想が成り立つことを示す。

### 2 整合度の再定義

$n$ 次元の一対比較行列が与えられたとき、その最大固有値を  $\lambda$  とすると、従来の整合度 (CI: Consistency Index)  $C$  は、次のように定義される。

$$C = \frac{\lambda - n}{n - 1}. \quad (1)$$

(1) で定義された整合度は、一対比較行列の固有値を用いているので、重要度ベクトルを固有値法で求める場合には計算可能であるが、それ以外の場合は一対比較行列の固有値を求める操作が余分に必要である。そこで、固有値法以外の方法で重要度ベクトルを計算する場合にも使え、かつ (1) を含むように整合度を再定義する。

ある  $n$ 次元一対比較行列  $Y = (y_{ij})$  から、何らかの方法で導出した重要度ベクトルを  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$  とする。このとき、

$$\mu_i = \sum_{j=1}^n y_{ij} \frac{v_j}{v_i} \quad , i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

とすると、もし重要度ベクトルが  $Y$  の固有ベクトルであれば、 $\mu_i, i = 1, 2, \dots, n$  はすべて  $Y$  の固有値である。

今、整合度  $\bar{C}$  を次のように定義する。

$$\bar{C} = \frac{\mu - n}{n - 1}. \quad (3)$$

ここに、

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i$$

である。重要度ベクトルが  $Y$  の固有ベクトルのとき、明らかに  $C = \bar{C}$  である。

### 3 幾何平均の場合

重要度を幾何平均で求めることとすれば、 $k$  番目の評価者による一対比較から求められる重要度は、

$$w_i^k = \left( \prod_{j=1}^n x_{ij}^k \right)^{1/n}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

とあらわされる。また、集団一対比較行列から導出される重要度は、

$$w_i = \left( \prod_{j=1}^n x_{ij} \right)^{1/n}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

とあらわされる。

このとき、 $k$  番目の評価者による一対比較行列の  $\bar{C}^k$  は、

$$\bar{C}^k = \frac{r^k - n}{n - 1}$$

ただし、

$$r^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}^k \frac{w_j^k}{w_i^k}$$

である。

さらに、集団一対比較行列の  $\bar{C}$  は、

$$\bar{C} = \frac{r - n}{n - 1}$$

ただし、

$$r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \frac{w_j}{w_i}$$

である。

本稿で興味があるのは、 $r^k$  の平均値（同じ意味で  $\bar{c}^k$  の平均値）と  $r$ （または  $\bar{c}$ ）の大小関係である。 $r^k$  の平均値を  $\bar{r}$  とすると、次のようにあらわされる。

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m r^k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_{ij}^k \frac{w_j^k}{w_i^k} \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \bar{r} - r &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_{ij}^k \frac{w_j^k}{w_i^k} - x_{ij} \frac{w_j}{w_i} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_{ij}^k \frac{w_j^k}{w_i^k} - \sqrt[m]{\prod_{k=1}^m x_{ij}^k \frac{\prod_{k=1}^m w_j^k}{\prod_{k=1}^m w_i^k}} \right) \end{aligned}$$

となり、相加平均は相乗平均以上であるということから、 $\bar{r} \geq r$  であることがわかる。

このことより、複数の評価者によるそれぞれの一対比較行列の整合度の平均値は、集団の一対比較行列の整合度を下回らないことが導かれる。すなわち集団で評価し、Saatyの方法で合意形成をすると、整合度は改善される傾向があることが判明した。

### 参考文献

- [1] 上田 徹, AHPにおけるグループ（集団）評価について; 日本オペレーションズリサーチ学会 2003 年春季研究発表会予稿集, 226-227(2003)