

ANPにおける異常現象を解決する修正ANP法の提案

01105803 愛知学院大学 岸 善徳 KISHI Yoshinori

1. はじめに

AHP (Analytic Hierarchy Process) では総合目標、評価基準、代替案が階層構造となっていて、評価基準と代替案との間は独立であるべきだと定めているが、現実には評価基準と代替案との間に依存関係があつて、その依存関係を組み込んだ形で評価せざるを得ない場合がある。そこで、サーティ氏はAHPにおける階層構造をネットワーク構造に拡張したANP (Analytic Network Process) を提案した。ANPではネットワーク構造の解析の基本として超行列 (Super Matrix) と呼ぶ確率行列を導入して、確率行列としての性質、行列の既約性や原始性を利用した解析法が確立している。

しかし、先生と学生の相互評価の例[2]では異常な結果が出ている。異常な結果は確率行列の手法をANPに適用したためと思われる。AHPに対するベルトン・ギアーの提案[1]をANPに適用する修正ANP法によれば合理的な結果を得ることができるので、修正ANP法を報告する。

2. 先生と学生の相互評価の例

m人の先生とn人の学生の相互評価を考える。

先生による学生n人の評価は

$$W = \begin{bmatrix} 1-(n-1)p & 1/n & \cdots & 1/n \\ p & 1/n & \cdots & 1/n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p & 1/n & \cdots & 1/n \end{bmatrix}$$

一方、学生による先生m人の評価は

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/(m-1) & \cdots & 1/(m-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1/(m-1) & \cdots & 1/(m-1) \end{bmatrix}$$

とする。

このとき、超行列 $S = \begin{bmatrix} 0 & V \\ W & 0 \end{bmatrix}$ の定常分布は

$$x^T = \left[\frac{m-1}{pn(n-1)}, 1, \dots, 1 \right]$$

$$y^T = \left[\frac{m-1}{pn(n-1)}, \frac{m-1}{n-1}, \dots, \frac{m-1}{n-1} \right]$$

となる。m=4, n=5の場合、様々なpに対するANPでの解は表のようになる。

3. 修正ANP法

修正ANP法では各列ごとに各列の最大要素が1になるように基準化する。この点が従来のANPと異なる。なお、各列ごとの要素の合計が1にならないので、修正ANP法の超行列は確率行列にならない。

各評価基準に対する代替案の評価ウェイトを列ベクトルとする行列を \bar{W} 、各代替案に対する評価基準の評価ウェイトを列ベクトルとする行列を \bar{V} 、評価基準の総合得点を \bar{x} 、代替案の総合得点を \bar{y} とすると

$$\bar{y} = \frac{1}{\alpha} \bar{W}\bar{x}, \quad \bar{x} = \frac{1}{\beta} \bar{V}\bar{y}$$

上式での α (β) は評価行列 W を \bar{W} (V を \bar{V}) に変換したときの変換指数にあたる。

\bar{W} は代替案の評価行列、 \bar{V} は評価基準の評価行列だから、行列 $\bar{V}\bar{W}$ 、 $\bar{W}\bar{V}$ は正の正方行列である。従って、フロベニウスの定理より次の命題を得る。

命題 行列 $\bar{V}\bar{W}$ 、 $\bar{W}\bar{V}$ の主固有ベクトル \bar{x} 、 \bar{y} は唯一であり、その成分はすべて正となる。

$\bar{V}\bar{W}\bar{x} = \alpha\beta\bar{x}$ 、 $\bar{W}\bar{V}\bar{y} = \alpha\beta\bar{y}$ よりパワー法を使用して \bar{x} 、 \bar{y} を求めることができる。

4. 修正ANP法による相互評価問題の解法

2. の例での評価行列を、各列ごとに各列の最大要素が1になるように基準化すると、

m人の先生による学生n人の評価である \bar{W} は、 $r = p/(1 - (n-1)p)$ とおくと

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

となる。一方、n人の学生による先生m人の評価である \bar{V} は

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

となる。適当な初期値から始めて \bar{x} 、 \bar{y} を求めることができる。

m=4, n=5の場合、様々なpに対するANP解と修正ANP解は表のようになる。

5. 相互評価問題の解析解

$\bar{V}\bar{W}$ 、 $\bar{W}\bar{V}$ はそれぞれ次の正行列になる。

$$\bar{V}\bar{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ (n-1)r & n-1 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)r & n-1 & \dots & n-1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{W}\bar{V} = \begin{bmatrix} 1 & m-1 & \dots & m-1 \\ r & m-1 & \dots & m-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r & m-1 & \dots & m-1 \end{bmatrix}$$

λ を $\bar{V}\bar{W}$ 、 $\bar{W}\bar{V}$ の主固有値とする。

$\bar{x}^T = [\xi, u, \dots, u]$ 、 $\bar{y}^T = [\eta, v, \dots, v]$ とおく。 ξ は先生1の総合得点、 η は学生1の総合

得点である。

$$\begin{cases} \xi + (m-1)u = \lambda\xi \\ (n-1)r\xi + (m-1)(n-1)u = \lambda u \\ \eta + (m-1)(n-1)v = \lambda\eta \\ r\eta + (m-1)(n-1)v = \lambda v \end{cases}$$

これより λ に関する次の2次方程式を得る。

$$(\lambda - 1)(\lambda - (m-1)(n-1)) = (m-1)(n-1)r$$

$k = (m-1)(n-1)$ とおくと、 λ は区間 $[0, 1]$ 、

$[k, k+1]$ 内に根を持つ。従って、 $\bar{V}\bar{W}$ 、 $\bar{W}\bar{V}$ の主固有値 λ は $k \leq \lambda \leq k+1$ となり、 \bar{x} 、 \bar{y} の要素の合計が1になるように正規化すると、 \bar{x} 、 \bar{y} の第1要素 ξ 、 η は

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\lambda} & \therefore \frac{1}{k+1} \leq \xi \leq \frac{1}{k} \\ \eta &= \frac{m-1}{\lambda+m-2} & \therefore \frac{1}{n} \leq \eta \leq \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

を得る。

先生1とその他の先生の比 $\xi : u$ 、学生1とその他の学生の比 $\eta : v$ は、次のような結果を得る。

p	$\xi : u$	$\eta : v$
p=0	m-1 : k-1	k : k-1
0 < p < 1/n	m-1 : $\lambda-1$	k : $\lambda-1$
p=1/n	1 : n-1	1 : 1

相互評価問題の修正ANP法による解

参考文献

- [1] V. Belton and T. Gear: On a Shortcoming of Saaty's Method of Analytic Hierarchies. Omega, 11/3(1983) 228-230
- [2] 加藤 豊: 意思決定における評価方法. オペレーションズリサーチ, 48/4(2003) 253-258

p=	0.1		0.05		0.01		0.005	
	ANP解	修正解	ANP解	修正解	ANP解	修正解	ANP解	修正解
先生1	0.3333	0.0821	0.5000	0.0829	0.8333	0.0833	0.9091	0.0833
その他の先生	0.2222	0.3060	0.1667	0.3057	0.0556	0.3056	0.0303	0.3056
学生1	0.3333	0.2116	0.5000	0.2133	0.8333	0.2141	0.9091	0.2142
その他の学生	0.1667	0.1971	0.1250	0.1967	0.0417	0.1965	0.0227	0.1964

表 ANPと修正ANP法による先生と学生の相互評価の解 m=4, n=5の場合