日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

保険会社のデフォルトを考慮した企業年金保険の価格付け

01207991　北海道大学大学院 経済学研究科　鈴木輝好　TERUYOSHI Suzuki

1　はじめに

我が国の年金基金のアセット・ミックスのうち生命保険会社を受託会社とする企業年金保険は特に1990年代前半までは安全資産と同等であると考えられていた．利率保証の確実性は極めて高いと考えられており，またオプション性を持つはずの額面保証について対価を要求されていなかったためである．しかし，運用環境が悪化した昨今，利率保証のデフォルトリスクは顕在化し，額面保証についても対価が要求されるようになってきた．本論文の目的はオプション性とデフォルトリスクを考慮した企業年金保険の価格を導出することである．

本論文と既存研究の大きな違いは保険会社のデフォルトを考慮する点にある．デフォルトリスクのあるオプション評価に関する代表的な研究には，デフォルトリスクについて Merton (1974) の構造モデルを用いた Johnson and Stulz (1987) がある．本論文で扱う企業年金は保険会社の自社資産の一部を参照するので構造モデルは適用しにくい．そこで本論文では，オプション発行者（生命保険会社）のデフォルトリスクに関して外生モデルである Jarrow and Turnbull (1995) を採用する．

2　モデル

まず，一般勘定資産および市場に関する仮定を示す．本論文を通じて，市場は完備で裁定機会は存在しないと仮定する．すなわち，唯一つのリスク中立測度 P が存在することを仮定する．また無リスク金利 r は一定であるとする．いま $\{B(t); 0 \le t\}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の標準1次元ブラウン運動とし，また $\{\mathcal{F}_t; 0 \le t\}$ は $\{B(s); s \le t\}$ により生成された加算加法族とする．このとき，一般勘定資産 $X(t)$ は確率測度 P の下で確率過程

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = rdt + \sigma dB(t), \quad t > 0 \tag{1}$$

に従うとする．ただし $X(0) = x$ である．さらに，生命保険会社のデフォルト時刻を確率変数 τ で表し，τ は $B(t)$ とは独立で平均 $1/h$ の指数分布に従うと仮定する．またデフォルト時点における損失率を L_s とする．

次にペイオフをモデル化する．企業年金保険には満期が無くまたいつでも解約できるとする．ただし，解約の際には解約控除金あるいは特別配当が生じるとする．すなわち，$X(t) < F$ における解約では，基金は解約控除率を α，額面を F とした場合，解約控除金 $\alpha(F - X(t))$ を支払い額面 F の保証を受けるものとする．また $X(t) > F$ における解約では，基金は配当率を β として特別配当を受け取ることができるとする．結局，基金の自発的な解約に関するペイオフは

$$\begin{cases} \alpha(X(t) - F) + F, & X \le F \\ \beta(X(t) - F) + F, & X > F \end{cases} \tag{2}$$

となる．ただしペイオフ関数の凸性を保証するために $\alpha < \beta$ を仮定する．これは，オプションペイオフは権利保有者にとって x の凸関数となる必要があるためで，その一般性については Kijima (2002) で述べられている．また，最低保証利率を C とし基金は保険会社がデフォルトするかまたは契約を解除するまでの間，連続的にこれを受け取るとする．ただし，格付けに応じた保証利率の設定を議論するために限界保証利率

$$C^* = (1-\beta)F(r + hL_s) + \beta L_s F(r + h) \tag{3}$$

を定義し，$C \le C^*$ を仮定する．さらに，保険会社のデフォルト時のペイオフを

$$(1 - L_s)\big(\beta X(\tau) + (1-\beta)F\big), \quad L_s > 0 \tag{4}$$

とする．これは，特別配当のペイオフから基金の本質的な持分を $\big(\beta X(t) + (1-\beta)F\big)$ とできるためである．

以上から，企業年金保険の時刻0における価格は自由境界問題の解

$$\begin{aligned} W(x) = \max_{\tau_L, \tau_U} E\Bigg[& \\ & 1_{\{\tau_L < \tau_U, \tau_L < \tau\}} \Big\{(1-\alpha)F + \alpha X(\tau_L)\Big\} \mathrm{e}^{-r\tau_L} \\ & + 1_{\{\tau_U < \tau_L, \tau_U < \tau\}} \Big\{(1-\beta)F + \beta X(\tau_U)\Big\} \mathrm{e}^{-r\tau_U} \\ & + 1_{\{\tau < \tau_L, \tau < \tau_U\}} (1 - L_s) \Big\{(1-\beta)F + \beta X(\tau)\Big\} \mathrm{e}^{-r\tau} \\ & + \int_0^{\tau_F \wedge \tau_K \wedge \tau} C\mathrm{e}^{-ru} du \,\Bigg|\, X(0) = x \Bigg] \end{aligned} \tag{5}$$

として表すことができる．ただし，本論文ではデフォルトリスクの影響を明らかにするために，複雑で煩雑な現実の企業年金保険を相当程度抽象化している点に注意されたい．

結局，資産過程 $X(t)$ の定常性および h が一定の仮定，さらに契約が無期限であることから，企業年金保険の価格に関する次の命題を得る．ただし，初到達時刻 τ_U, τ_L に関するラプラス変換として次の関数

$$f_u(x) = E\left[1_{\{\tau_U<\tau_L\}}e^{-(r+h)\tau_U}\middle| L<x<U\right],$$
$$f_l(x) = E\left[1_{\{\tau_L<\tau_U\}}e^{-(r+h)\tau_L}\middle| L<x<U\right]$$

を用意しておく．任意抽出定理を用いると容易に計算でき

$$f_u(x) = \frac{l_2 f_1(x) - l_1 f_2(x)}{l_2 - l_1}, f_l(x) = \frac{f_2(x) - f_1(x)}{l_2 - l_1}$$
$$f_i(x) = \left(\frac{x}{U}\right)^{\lambda_i}, l_i = \left(\frac{L}{U}\right)^{\lambda_i}, i = 1, 2$$

のように表すことができる．ただし，λ_1, λ_2 は $\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\lambda - (r+h) = 0, \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ を満たす．

命題 1 保証利率を C，解約控除率を α，特別配当の配当率を β，額面を F とし，また解約時のペイオフを式 (2)，デフォルト時のペイオフを式 (4) とする企業年金保険の価格は

$$W(x) = H(x) + f_l(x)\big(W_l - H(L)\big) + f_u(x)\big(W_u - H(U)\big)$$

により与えられる．ただし

$$H(x) = \beta(1-L_s)x + (1-\beta)(1-L_s)\frac{hF}{r+h} + \frac{c}{r+h}, \quad (6)$$

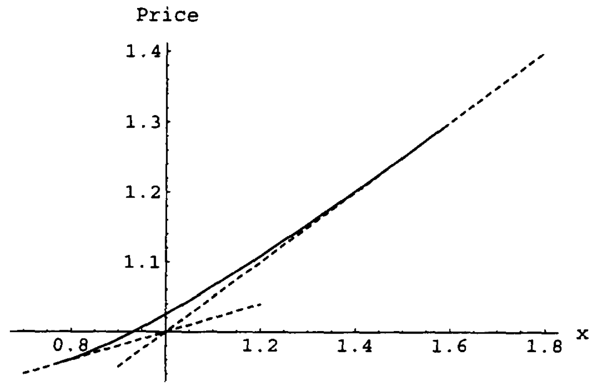
$$W_l = (1-\alpha)F + \alpha L, W_u = (1-\beta)F + \beta U, L < x < U$$

とし，L, U は smooth pasting condition

$$\left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{x=L} = \alpha, \qquad \left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{x=U} = \beta \qquad (7)$$

を満たす．

関数 $f_u(x)$ は保険会社がデフォルトする前に $X(t)$ がはじめて最適行使境界 U に達したときに額 1 を支払う Arrow-Debreau 証券の価格を意味する．$f_l(x)$ も同様である．このことから，価格式 $W(x)$ の第 1 項 $H(x)$ は企業年金の本質的な持分を表し，また第 2 項は解約控除付き額面保証の権利行使価値と本質的持分の消失，第 3 項は特別配当を受け取る権利の行使価値と本質的持分の消失を表していることが分かる．ここで式 (6) を見ると，本質的持分 $H(x)$ は特別配当の価値およびデフォルト時に回収できる額面の価値，永久利率保証の価値の 3 項から構成されていることを確認できる．図には，適当なパラメータ設定の下で企業年金保険の価格を初期資産 x に関して描いた．$x = L, U$ において smooth pasting condition(7) が満たされる．



実線は $W(x)$ を，点線は式 (2) を表す．$U = 1.59, L = 0.765$．パラメータは次の通り．$\alpha = 0.2, \beta = 0.5, h = 0.001, F = 1.0, r = 0.01, L_s = 0.8, C = 0.005, \sigma = 0.1$

3 企業年金保険とデフォルトリスク

過去の格付け別デフォルト率からハザード率 h を推定し，命題 1 を用いて分析した結果，企業年金価格はデフォルトリスクの影響を受け難い一方で，年金基金の解約戦略は大きな影響を受けることが分かった．結局，企業年金保険の価格は格付けによって大きくは違わないが，格付けの低い保険会社では解約が頻繁に発生することが分かった．

参考文献

[1] Jarrow, R. A. and S. M. Turnbull (1995), "Pricing derivative on financial securities subject to credit risk," *Journal of Finance*, **50**, 53–86.

[2] Johnson, H. and R.Stulz (1987), "The pricing of options with default risk," *Journal of Finance*, **42**, 267–290.

[3] Kijima, M. (2002), "Monotonicity and convexity of option prices revisited," *Mathematical Finance*, **12**, 411–425.

[4] Merton, R. C. (1974), "On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates," *Journal of Finance*, **29**, 449–470.