

ネットワーク信頼性重要度を計算するアルゴリズムの拡張

01109114 流通科学大学 *小出 武 KOIDE Takeshi
01205144 鹿児島大学 新森 修一 SHINMORI Shuichi
01005195 大阪大学 石井 博昭 ISHII Hiroaki

1. はじめに

本研究の目的は、ネットワーク型システムにおける信頼性重要度 (reliability importance: RI) を効率良く計算することである。あるシステムにおけるシステム構成要素の RI とは、構成要素の信頼度を変化させたときにシステムの信頼度が変化する割合である。特に、注目する構成要素の数が 1 のときには MRI (marginal RI) と呼ばれる。

我々は [1] において、ネットワーク型システムにおける MRI を効率良く計算するアルゴリズムを提案した。本研究では先の研究を発展させ、以下の成果を得た：(1) システム信頼度の尺度として、先の研究で対象にした総合信頼度ではなく、上位概念である k 点信頼度を採用した場合にも適用できるよう拡張した (2) 計算する対象として、MRI の一般形である RI を計算するよう拡張した (3) アルゴリズムを改良し、実行時間を短縮させた。

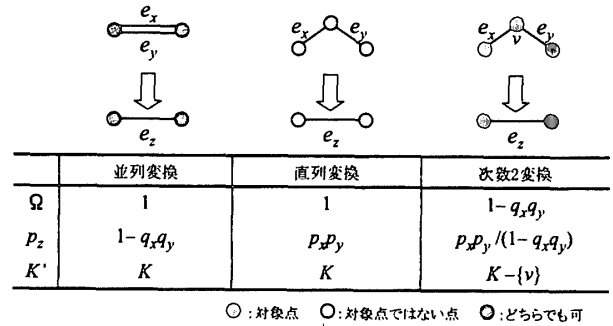
2. RI の定義と問題の設定

要素数 n の点集合 V 、要素数 m の枝集合 E で構成されるネットワーク $G = (V, E)$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ を考える。 G において点は常に正常であるが、枝 e_i は確率 $q_i (= 1 - p_i)$ で故障する。確率 p_i を枝 e_i の信頼度と呼び、各枝の信頼度は互いに独立とする。 G 中の k 個の点の集合 $K \subseteq V$ を対象点と呼ぶ。このとき、集合 K に属するすべての対象点が正常な枝で連結される確率を k 点信頼度といい、 $R_K(G)$ で表す。 $R_K(G)$ の計算は NP 完全であることが証明されている [2]。本研究ではグラフ G は連結で、削除しても $R_K(G)$ に影響を及ぼさない点や枝を持たないと仮定する。

ネットワーク G において、信頼度 $R_K(G)$ に関する枝集合 $E' = \{e_{i(1)}, e_{i(2)}, \dots, e_{i(l)}\} \subseteq E$ の RI $I_{G,K}(E')$ は次式で定義される。

$$I_{G,K}(E') \equiv \partial^l R_K(G) / \partial p_{i(1)} \partial p_{i(2)} \cdots \partial p_{i(l)}$$

ただし $I_{G,K}(\phi) \equiv R_K(G)$ とする。特に、枝 $e_i \in E$ の MRI $I_{G,K}(e_i)$ は通常 $I_{G,K}(i)$ と記され、枝信頼度の独立性から $I_{G,K}(i) = R_K(G * e_i) - R_K(G - e_i)$ と表現



○:対象点 ○:対象点ではない点 ●:どちらでも可

図 1: k 点信頼度に関する基本的なグラフ変換

できることが知られている。RI の計算も $R_K(G)$ と同様に NP 完全である。

ネットワーク型システムにおける各構成要素の信頼度を設定する上で、RI は重要な指標である。例えば、ネットワーク G に属する枝 e_i の信頼度 p_i を $p_i + \delta$ に変更した場合、変更後のネットワーク G' の信頼度 $R_K(G')$ は次式で与えられる。

$$R_K(G') = R_K(G) + \delta I_{G,K}(i)$$

上式は、ある一本の枝の信頼度を向上させてシステム全体の信頼度を向上させる場合には、MRI の大きな枝を選択するのが効果的であることを表している。本研究では、NP 完全である RI の計算を効率良く行うことを目的とする。

3. k 点信頼度に関する RI 計算の効率化

3.1 グラフ変換による効率化

[1] では、総合信頼度の計算のためによく用いられる 3 種のグラフ変換を利用して、MRI を効率良く計算する方法を提案した。ここでは k 点信頼度に関しても同様の方法を提案する。

k 点信頼度の計算においてよく用いられるグラフ変換を図 1 に示した。これらの 3 つのグラフ変換は、2 本の枝を確率的に等価な 1 本の枝に変換する。ネットワーク G 中の 2 本の枝 $e_x, e_y (x \neq y)$ に対し、あるグラフ変換を適用して枝 e_z が構築されたとする。変換後のネットワークを \tilde{G} とすると、 $R_K(G) = \Omega R_{K'}(\tilde{G})$ が

成立する。

我々はグラフ変換と RI に関する次の補題を証明した。

補題 1 ネットワーク $G = (V, E)$ において $E' \subseteq E$ とする。2本の枝 $e_x, e_y \in E$ を枝 e_z に変換するグラフ変換によって構築されたネットワークを \tilde{G} とすると、 $I_{G,K}(E')$ は次の通りとなる。

$$I_{G,K}(E') = \begin{cases} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p_x \partial p_y} I_{\tilde{G},K'}(E' - e_x - e_y) \\ \quad + \Theta I_{\tilde{G},K'}(E' - e_x - e_y \cup e_z) & \text{if } e_x, e_y \in E', \\ \frac{\partial \Omega}{\partial p_x} I_{\tilde{G},K'}(E' - e_x) + \Omega \frac{\partial p_x}{\partial p_x} I_{\tilde{G},K'}(E' - e_x \cup e_z) & \text{if } e_x \in E', e_y \notin E', \\ \frac{\partial \Omega}{\partial p_y} I_{\tilde{G},K'}(E' - e_y) + \Omega \frac{\partial p_y}{\partial p_y} I_{\tilde{G},K'}(E' - e_y \cup e_z) & \text{if } e_x \notin E', e_y \in E', \\ \Omega I_{\tilde{G},K'}(E') & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ここで、 $\Theta \equiv \frac{\partial \Omega}{\partial p_x} \frac{\partial p_x}{\partial p_y} + \frac{\partial \Omega}{\partial p_y} \frac{\partial p_y}{\partial p_x} + \Omega \frac{\partial^2 p_x}{\partial p_x \partial p_y}$ である。

系 1 グラフ変換が並列変換の場合、

$$I_{G,K}(i) = \begin{cases} q_y I_{\tilde{G},K'}(z) & \text{if } i = x, \\ q_x I_{\tilde{G},K'}(z) & \text{if } i = y, \\ I_{\tilde{G},K'}(i) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

系 2 グラフ変換が直列変換の場合、

$$I_{G,K}(i) = \begin{cases} p_y I_{\tilde{G},K'}(z) & \text{if } i = x, \\ p_x I_{\tilde{G},K'}(z) & \text{if } i = y, \\ I_{\tilde{G},K'}(i) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

系 3 グラフ変換が次数 2 変換の場合、

$$I_{G,K}(i) = \begin{cases} q_y R_{K'}(\tilde{G}) + \frac{p_y^2}{1 - q_x q_y} I_{\tilde{G},K'}(z) & \text{if } i = x, \\ q_x R_{K'}(\tilde{G}) + \frac{p_x^2}{1 - q_x q_y} I_{\tilde{G},K'}(z) & \text{if } i = y, \\ (1 - q_x q_y) I_{\tilde{G},K'}(i) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

補題 1 は、 G より小さなネットワークである \tilde{G} における RI を算出すれば、 G における RI を計算することができることを示している。RI の計算は NP 完全であるため、対象のネットワークの大きさを小さくすることにより計算を効率化できる。

補題 1 では 2本の枝を 1本の枝に変換するグラフ変換を対象としている。しかし $R_K(G) = \Omega R_{K'}(\tilde{G})$ で表されるグラフ変換であれば、同様の形式を持つ補題を導出できる。 k 点信頼度の計算に用いられることが多い polygon-chain 変換 [2] に対しても、変換前後の RI に対する関係式を導出することができる。

3.2 非可分成分分割による効率化

ネットワークにおいて、切断点を持たない極大な部分ネットワークを非可分成分という。このとき、以下の補題が成立する。

補題 2 L 個の非可分成分 G^1, G^2, \dots, G^L を持つネットワーク $G = (V, E)$ が存在する。 $E' \subseteq E$ のとき、

$$I_{G,K}(E') = \prod_{l=1}^L I_{G^l,K^l}(E'_l).$$

ここで、 E'_l は E' 中の枝のうち G^l 中に存在する枝の集合、 K^l は対象点、切断点のうち、 G^l 中に属するものの集合である。

補題 2 は、非可分成分における RI によって全体のネットワークにおける RI を計算できることを表している。非可分成分分解によっても、対象のネットワークを小さくし、RI の計算効率を高めることができる。

3.3 factoring による効率化

グラフ変換や非可分成分分解が適用できない場合には、factoring をグラフ変換や非可分成分分解と併用することによって計算効率が良いことが多い。以下に factoring と RI との関係式を示す。

補題 3 $G = (V, E)$ において、 $E' \subset E$ 、 $e_x \in E$ とすると、以下の等式が成立する。

$$I_{G,K}(E') = \begin{cases} I_{G * e_x, K'}(E' - e_x) - I_{G - e_x, K}(E' - e_x) & \text{if } e_x \in E', \\ p_x I_{G * e_x, K'}(E') + q_x I_{G - e_x, K}(E') & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ここで点 u, v が対象点でない場合は $K' = K$ 、その他の場合は $K' = K - \{v, u\} \cup \{w\}$ である。点 v, u は枝 e_x の両端点、点 w は枝 e_x の縮約によって構築された点である。

紙面の都合上、これらの補題を用いて RI を計算するアルゴリズムの概要と数値結果の結果は、当日発表させて頂く。

参考文献

- [1] 小出, 新森, 石井: グラフ変換による marginal reliability importance 計算の効率化, 日本 OR 学会春季研究発表会アブストラクト集, 40-41, 2003.
- [2] C. J. Colbourn: *Combinatorics of Network Reliability* (Oxford University Press, 1987).