日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

情報不完備下の戦略形ゲームにおけるコア戦略の関係

早稲田大学大学院経済学研究科 松八重 泰輔 MATSUBAE Taisuke

1 はじめに

この論文は，情報不完備下における戦略形ゲームのコア戦略の関係を考察する．そこで，これまでの研究 (Ichiishi and Idzik (1996) など) では扱われなかった，提携外のプレイヤーの行動を考慮したベイジアンインセンティブコンパティビィリィティー (B.I.C.) の定義をし，そのもとで整合的なコア戦略の定義をおこなう．最後に，この論文の結論である，情報不完備下における戦略形ゲームのコア戦略の関係を考察する．

2 基本的な枠組み

$N := \{1,2,\dots,n\}$ をプレイヤー集合とする．N の全ての非空な部分集合を，$\mathcal{N}(:= 2^N \setminus \{\emptyset\})$ とする．各プレイヤー $j \in N$ は，行動集合 C^j，タイプ集合 T^j とタイプ依存型のフォンノイマン・モルゲンシュテイン型効用函数 u^j をもつ． $C^j := \prod_{j\in S} C^j, T^S := \prod_{j\in S} T^j$ と定義する．記号の簡略化のため $C := C^N, T := T^N$ と記す．π を T 上の事前確率とする．任意のプレイヤー j の戦略は写像 $x^j : T^j \to C^j$ である．そこで戦略集合 X^j をつぎのように定義する:

$$X^j := \{x^j : T^j \to C^j\}.$$

任意の提携 $S \in \mathcal{N}$ に対して，結合戦略の集合を，$X^S := \prod_{j\in S} X^j$ と定義する．

実現可能戦略集合をつぎに定義する．ここで実現可能戦略とは，B.I.C. を満たす戦略のみを実現可能戦略と考える．B.I.C. とは，他のプレイヤーが真のタイプに対して正直に行動しているときに，自分だけがタイプを偽った行動をとるインセンティブがないということである．この論文では，提携外の行動も考慮した B.I.C. を 2 つの方法で定義する．

1 つ目として，α 的な予測をおこなう場合の，実現可能戦略集合の考察をする．どのようにその予測を実現可能戦略の定義に導入するかというと，提携外のプレイヤーが任意の戦略をとるとし，そのもとで B.I.C. を満たす戦略を提携 S の戦略における実現可能戦略 (α-F.S.) とする: 任意の提携 $S \in \mathcal{N}$ に対して，つぎのように定義する．

$$E[u^j(x)|\bar{t}^j] := \sum_{t'^{N\setminus\{j\}} \in T^{N\setminus\{j\}}} u^j(x, (\bar{t}^j, t'^{N\setminus\{j\}}))\pi(t'^{N\setminus\{j\}}|\bar{t}^j).$$

$$F^S_\alpha := \left\{ x^S \in X^S \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall\, x^{N\setminus S} \in X^{N\setminus S}: \forall\, j \in S: \forall\, t^j \in T^j: \forall\, c^j \in x^j(T^j): \\ E[u^j(x^S, x^{N\setminus S}|t^j)] \geqslant E[u^j(c^j, x^{S\setminus\{j\}}, x^{N\setminus S}|t^j)]. \end{array} \right\}.$$

2 つ目とし，β 的な予測の実現可能戦略集合の考察をおこなう．この予測を実現可能戦略の定義に導入する方法は，提携外のプレイヤーがある戦略をとるとし，そのもとで B.I.C. を満たす戦略を提携 S の実現可能戦略 (β-F.S.) とする: 任意の提携 $S \in \mathcal{N}$ に対して，つぎのように定義する．

$$F^S_\beta(x^{N\setminus S}) := \left\{ x^S \in X^S \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall\, j \in S: \forall\, t^j \in T^j: \forall\, c^j \in x^j(T^j): \\ E[u^j(x^S, x^{N\setminus S}|t^j)] \geqslant E[u^j(c^j, x^{S\setminus\{j\}}, x^{N\setminus S}|t^j)]. \end{array} \right\}.$$

注) F^N は両概念とも一致する．

3 解概念

Definition 3.1 (事前情報不完備 α コア戦略). 戦略 $\hat{x} \in F^N$ が事前情報不完備 α コア戦略であるとは，

$$\neg\, \exists\, S \in \mathcal{N}: \exists x^S \in F^S_\alpha: \forall x^{N\setminus S} \in X^{N\setminus S}: \forall j \in S:$$

$$E[u^j(x^S, x^{N\setminus S})] > E[u^j(\hat{x})],$$

ということである．

Definition 3.2 (事前情報不完備 β コア戦略). $\hat{x} \in F^N$ が事前情報不完備 β コア戦略とは，

$$\neg\, \exists\, S \in \mathcal{N}: \forall x^{N\setminus S} \in X^{N\setminus S}: \exists x^S \in F^S_\beta(x^{N\setminus S}): \forall j \in S:$$

$$E[u^j(x^S, x^{N\setminus S})] > E[u^j(\hat{x})],$$

ということである．

提携外のプレイヤーにも，B.I.C. を課した場合のコア戦略をつぎに定義する．

Definition 3.3 (事前情報不完備 $\hat{\alpha}$ コア戦略). 戦略 $\hat{x} \in F^N$ が事前情報不完備 $\hat{\alpha}$ コア戦略であるとは,

$$\forall S \in \mathcal{N}: \forall x^S \in F_{\alpha}^S: \exists x^{N \setminus S} \in F_{\beta}^{N \setminus S}(x^S): \exists j \in S:$$

$$E[u^j(x^S, x^{N \setminus S})] \leqslant E[u^j(\hat{x})],$$

ということである.

このDef.3.3は, Def.3.1とは異なり, 提携のプレイヤーが離脱が考えるときに, 提携外のプレイヤーはB.I.C.を満たす戦略のみをとると, 予測していることになる. ここで注意が必要なことは, 提携外のプレイヤーがとることが可能な戦略集合として $\beta - F.S.$ を用いていることである. なぜ $\beta - F.S.$ を用いるかというと, 離脱する提携は自分達が離脱戦略をとると, それに対して提携外のプレイヤーは, ある戦略をとってくると予測する概念であるからである.

Definition 3.4 (事前情報不完備 $\hat{\beta}$ コア戦略). $\hat{x} \in F^N$ が事前情報不完備 $\hat{\beta}$ コア戦略とは,

$$\forall S \in \mathcal{N}: \exists x^{N \setminus S} \in F_{\alpha}^{N \setminus S}: \forall x^S \in F_{\beta}^S(x^{N \setminus S}): \exists j \in S:$$

$$E[u^j(x^S, x^{N \setminus S})] \leqslant E[u^j(\hat{x})],$$

ということである.

このDef.3.4は, 提携外のプレイヤーがとれる戦略集合として, $\alpha - F.S.$ を用いている. なぜ $\alpha - F.S.$ に制限してるかというと, 提携外のプレイヤーは, 離脱する提携の戦略に依存しないで, 戦略をとるからである.

それぞれのコア戦略集合を $\mathbb{C}_E^{\alpha}, \mathbb{C}_E^{\beta}, \hat{\mathbb{C}}_E^{\alpha}, \hat{\mathbb{C}}_E^{\beta}$ と定義する. 定義から明らかのように, $\mathbb{C}_E^{\beta} \subseteq \mathbb{C}_E^{\alpha}, \hat{\mathbb{C}}_E^{\beta} \subseteq \hat{\mathbb{C}}_E^{\alpha}$ の関係が成り立っている.

4 結果

Proposition 4.1. [1)]

$$\forall S \in \mathcal{N}: \forall j \in S:$$

$$\left(\bigcap_{x^S \in X^S} BP_j^{N \setminus S}(x^S) \right) \bigcap Id^{N \setminus S} \neq \emptyset$$

であるならば, そのとき, $\mathbb{C}_E^{\alpha} = \hat{\mathbb{C}}_E^{\alpha} = \mathbb{C}_E^{\beta} = \hat{\mathbb{C}}_E^{\beta}$.

$\left(\bigcap_{x^S \in X^S} BP_j^{N \setminus S}(x^S) \right) \bigcap Id^{N \setminus S} \neq \emptyset$ の条件は提携外の戦略をして, 提携の任意のプレイヤーに対して最悪の利得を与える戦略が恒等戦略に含まれるということを意味している. この条件はかなり強い条件である. このことから, 提携外のプレイヤーに, B.I.C.を満たす行動のみであると予測した場合と, 予測しない場合では, 大きな違いがあることを意味している. この条件が存在しない場合, $\hat{\mathbb{C}}_E^{\alpha} \subseteq \mathbb{C}_E^{\beta}$ となる興味深い例が存在する. 一般的には, つぎのような条件の下で, このような関係が成り立つ.

Proposition 4.2. $\forall S \in \mathcal{N}: \forall j \in S: \bigcap_{x^S \in X^S} BP_j^{N \setminus S}(x^S) \neq \emptyset$ であるならば, $\hat{\mathbb{C}}_E^{\alpha} \subseteq \mathbb{C}_E^{\beta}$.

このことは, 提携外のプレイヤーが, 提携の任意のプレイヤーにとって最も低い利得を与える戦略があるならば, 提携外の行動としてB.I.C.を満たすものだけであると, 提携が α 的に予測すると, 提携外の戦略に制限を与えないで, 提携が β 的な予測をするよりも, 離脱しやすいことを示している.

この論文での最も興味深い結果は $\hat{\mathbb{C}}_E^{\alpha}$ が $\mathbb{C}_E^{\beta}$ に含まれるという事実である. この結果は, 情報が完全である場合も含めて, 今までの α コア β コアの関係では見られなかった事実である. このことは提携の予測の仕方に依存する結果である.

今後の課題としては, それぞれの解について, この論文ではかなり強い条件で特徴付けたので, より弱い条件でこれらの関係を示すことが挙げられる.

参考文献

Ichiishi, T. and A. Idzik (1996). "Bayesian coopertive choice of strategies." *International Journal of Game Theory.* **25**, 455–473.

1).

$$Id^S := \left\{ x^S \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall\, j \in S, \\ x^S : T \to c^j \end{array} \right\}.$$

$$BP_j^{N \setminus S}(x^S) := \left\{ x^{N \setminus S} \in X^{N \setminus S} \;\middle|\; E[u^j(x^S, x'^{N \setminus S})] \geqslant E[u^j(x^S, x^{N \setminus S})] : \forall x'^{N \setminus S} \in X^{N \setminus S} \right\}$$