日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

巡回路の辺長分布

02900310 筑波大学 *渡部大輔 WATANABE Daisuke
01205430 筑波大学 鈴木 勉 SUZUKI Tsutomu
01102840 筑波大学 腰塚武志 KOSHIZUKA Takeshi

1. はじめに

巡回セールスマン問題 (Traveling Salesman Problem: TSP) とは，n 箇所の都市全てを回って再び出発点に戻ってくる経路のうち，コストが最小になる巡回路を求める問題である [10]．これは $\mathcal{NP}$-hard の問題として知られており，大規模問題に対して最適解を保証した解法は存在しないと考えられている．そのため，近似解法が数多く提案されており，空間充填曲線法や Karp 分割算法，Lin-Kernighan 法など実用的な精度と計算時間が報告されている [4]．

一方，訪問すべき点の数と領域面積のみで巡回路の長さを概算できることは，輸配送に関する諸問題への基礎的知見として有用である [6]．そこで本研究では，二次元平面におけるランダムに分布する点間を結ぶ巡回路長の総延長及び各辺の長さ分布を推定する．その際，理論値として探索領域を限定した最近隣距離を導出し，数値実験結果との比較を行う．

2. 既存研究

巡回路長の推定のために，確率的解析と実験的解析の2つの方法がとられてきた．確率的解析として，d 次元超立方体 ($d \geq 2$) においてランダムな n 個の点についての巡回路長の最短距離 $l(\mathbb{P}^n)$ は，$\mathfrak{E}$：ルベーグ加測集合，$v(\mathfrak{E})$：ルベーグ測度とするとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l(\mathbb{P}^n)}{n^{(d-1)/d}} = \beta_d d^{1/2}[v(\mathfrak{E})]^{1/d} \tag{1}$$

が成立する [1]．この結果は BHH 定理と呼ばれ，$\beta_{\text{TSP}}(d) = \beta_d d^{1/2}$ として $0.625 < \beta_{\text{TSP}}(2) < 0.9204$ と推定されているが，正確な係数は未だ導出されていない [6, 9]．一方，実験的解析として数値実験から，Lin-Kernighan 法より 0.7120([8])，Held-Karp 下界値より 0.7124([3])，空間充填曲線法より 0.71478270([7]) などの結果が推定された．

3. 探索領域を限定した最近隣距離

最近隣距離とは，任意の点から点群の中の最も近い点までの距離である [5]．円を k 等分した扇形領域に探索領域を限定した場合 [2] と同じく，本節では探索領域を中心角 θ とした扇形領域である場合を定式化する．その際，巡回路では全ての点における接続次数が 2 であるという特徴から，探索領域を半円領域 ($\theta = \pi$) した場合について導出する．

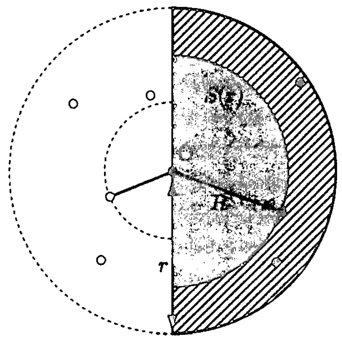

図 1: 探索領域を限定した場合の巡回路の構築原理

母点群が大局的な密度 ρ で一様にランダムに分布しているとき，面積 A の領域に母点が x 個ある確率 $P(x, A)$ はポワソン分布に従う．

$$P(x, A) = \frac{(\rho A)^x}{x!}\mathrm{e}^{-\rho A} \tag{2}$$

母点群が与えられたとき，角度 θ 以内で任意の点から最も近い一つの点までの距離の確率密度関数を $f_\theta(r)$ とおく．最近隣距離 R が $0 < R < r$ までの確率を考える．これは，半径 r，中心角 θ の扇形領域 (面積 $S(r) = \theta r^2/2$) に母点の少なくとも一つの点が含まれる確率である．扇形領域内に母点が一個も存在しない確率を $P(0, \theta r^2/2)$ とすると，

$$\int_0^r f_\theta(R)\mathrm{d}R = 1 - P\left(0, \theta r^2/2\right) \tag{3}$$

となる．$P(0, \theta r^2/2)$ が微分可能であるとき，この両辺を r で微分して，

$$f_\theta(r) = -\frac{\mathrm{d}P\left(0, \theta r^2/2\right)}{\mathrm{d}r} \tag{4}$$

となる．そして，母点の分布がポアソン分布に従っているとき，式 (2) より

$$P\left(0, \theta r^2/2\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\rho\theta r^2} \tag{5}$$

となるので，式 (4) に代入することで

$$f_\theta(r) \quad = \quad \rho\theta r\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\rho\theta r^2} \tag{6}$$

が導かれ，期待値 $E_\theta(R)$ と分散 $V_\theta(R)$ は，

$$
\begin{aligned}
E_\theta(R) &= \int_0^\infty rf(r)\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\rho\theta}} \qquad (7)\\
V_\theta(R) &= E_\theta(R^2) - (E_\theta(R))^2 \\
&= \frac{4-\pi}{2\rho\theta} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

となる．巡回路を構成する辺の長さ分布及び期待値，分散は，中心角 $\theta=\pi$ を式 (6)，式 (7)，式 (8) へ代入することで以下のように求まる．

$$
\begin{aligned}
f_\pi(r) &= \rho\pi r e^{-1/2\rho\pi r^2} \qquad (9)\\
E_\pi(R) &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\rho}} \qquad (10)\\
V_\pi(R) &= \frac{4-\pi}{2\rho\pi} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

4. 実験結果

前節で求めた理論的結果に対して，実際の点分布で巡回路を構築した場合を比較する．数値実験の条件は，以下のように設定した．

- データ：DIMACS Implementation Challenge on the STSP[i]([4]),Random Uniform Euclidean Instances
- 巡回路長算出アルゴリズム：Chained Lin-Kernighan 法 (Concorde package[ii])

一例として，データ名 E1K.1（母点数 $n=1000$, 面積 $S=10^6\times10^6$, 密度 $\rho=10^{-9}$）の計算結果は，図 2 のようになる．基準化した実測値の分布は，実線で示した式 (9) と分布形が近いことが分かる．

5. まとめと今後の展望

探索領域を限定した最近隣距離により，巡回路の辺長分布とかなり近いことが分かった．また，既存研究において実験的に得られた数値を比べると小さいもののかなり近い値であることも確認できた．これは，非連結であったり部分巡回路を排除しているかどうか確認できないためであり，本研究の結果は巡回路の下界値として有用であると考えている．

巡回路と深い関係があると言われるドローネ網や最小木といった近接グラフとの関係や，点分布がランダムでない場合について，検証が必要である．

[i] `http://www.research.att.com/~dsj/chtsp/index.html`
[ii] `http://www.math.princeton.edu/tsp/concorde.html`

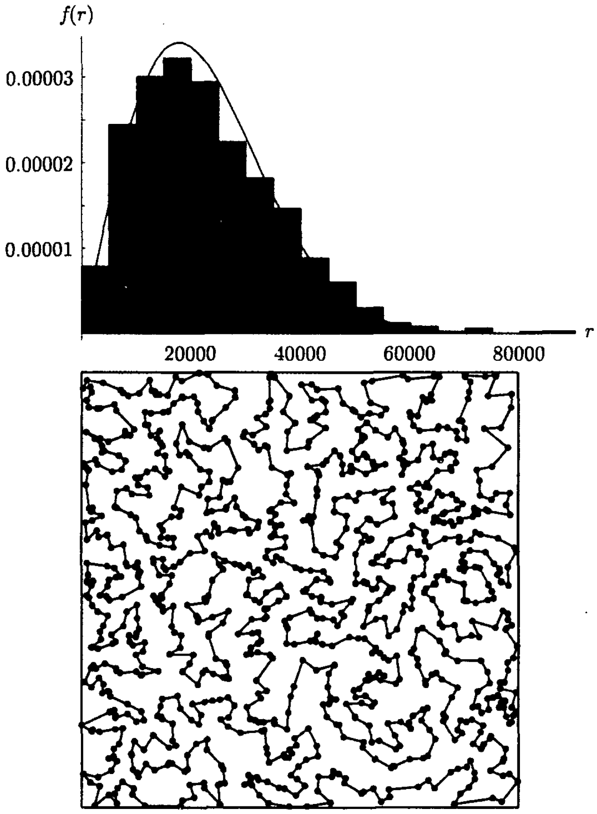

図 2: 巡回路の辺長分布と構築された巡回路

参考文献

[1] Bearwood, J. , Halton, J. H. and Hammersley, J. M., The shortest path through many points, *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **55**(1959), 299-327.

[2] Clark,P. J. and Evans, F. C., Distance to nearest neighbor as a measure of spatial relarionships in population, *Ecology*, **35**(1954), 445-453.

[3] Johnson, D. S., McGeoch, L. A. and Rothberg, E. E., Asymptotic experimentalanalysis for the Held-Karp traveling salesman bound, *Proceedings of the 7-th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algolithms*, (1996), 341-350.

[4] Johnson, D. S. and McGeoch, L. A., Experimental analysis of heuristics for the STSP, in *The Traveling Salesman Problem and its Variations*, Gutin, G. and Punnen, A., editors, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002, 369-443.

[5] 腰塚武志, 都市施設の密度と利用者からの距離との関係について, 都市計画論文集, **20**(1985), 43-48.

[6] 久保幹雄, 田村明久, 松井知己編, 応用数理計画ハンドブック, 朝倉書店, 東京, 2002.

[7] Norman, M. G. and Moscato, P., The euclidean traveling salesman problem and a space-filling curve, *Chaos, Solitons and Fractals*, **6**(1995), 389-397.

[8] Percus, A. G. and Martin, O. C., Finete size and dimentional dependence in the euclidean traveling salesman problem, *Physical review letters*, **78**(1996), 1188-1191.

[9] Steel, J. M. , *Probability Theory and Combinatorial Optimization*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1997.

[10] 山本芳嗣, 久保幹雄, 巡回セールスマン問題への招待, 朝倉書店, 東京, 1997.