

### 近接グラフの辺長分布

02900310 筑波大学 \*渡部大輔 WATANABE Daisuke  
01205430 筑波大学 鈴木 勉 SUZUKI Tsutomu  
01102840 筑波大学 履塚武志 KOSHIZUKA Takeshi

#### 1. はじめに

近接グラフ (Proximity Graph) とは、ドロネ網や最小木に代表されるような平面上において点同士の近さに基づいて定義される下記の6つのグラフの総称である [8].

- 孤立最近接対 (Reciprocal Pairs: RP)
- 最近傍グラフ (Nearest Neighborhood Graph: NNG)
- 最小木 (Minimum Spanning Tree: MST)
- 相対近傍グラフ (Relative Neighborhood Graph: RNG)
- ガブリエルグラフ (Gabriel Graph: GG)
- ドロネ網 (Delaunay Triangle: DT)

各グラフ間の関係は、 $RP \subseteq NNG \subseteq MST \subseteq RNG \subseteq GG \subseteq DT$  である。

近接グラフを都市内の点を結ぶ線施設と見なすと、その総延長と各区間距離を導出することによって、都市インフラの建設・維持への基礎的知見となる。そこで、本研究では、二次元平面におけるランダムに分布する点間を結ぶグラフの長さを推定する。探索領域を限定した最近隣距離により、最小木などの近接グラフの辺長分布を導出し、数値実験結果との比較を行う。

#### 2. 既存研究

RP[9], NNG[2], GG[6] の辺長分布は、すでに導出されている。DT の辺長分布は、

$$f_{DT}(r) = \frac{\pi \rho r}{3} \left\{ \sqrt{\rho} e^{-\frac{1}{2}\pi \rho r^2} + \text{Erfc} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\pi \rho} r \right) \right\} \quad (1)$$

と求まっている [3, 7]。但し、Erfc は誤差関数である。

MST において、確率的解析では、下界値として 0.600822 と推定され [1]、近隣辺の構成比率より 0.64 と推定 [4] され、上界値として 0.707 と推定された [10]。数値実験では回帰分析により 0.656 と推定された [10]。

RNG の長さ推定に関する研究はない。

#### 3. 探索領域を限定した最近隣距離分布

最近隣距離とは、任意の点から点群の中の最も近い点までの距離である [2, 5]。各近接グラフについて、図 1 において灰色領域となる探索領域の面積  $S(r)$  を求めることで、辺長の確率密度関数は

$$f(r) = \frac{dS(r)}{dr} \rho e^{-\rho S(r)} \quad (2)$$

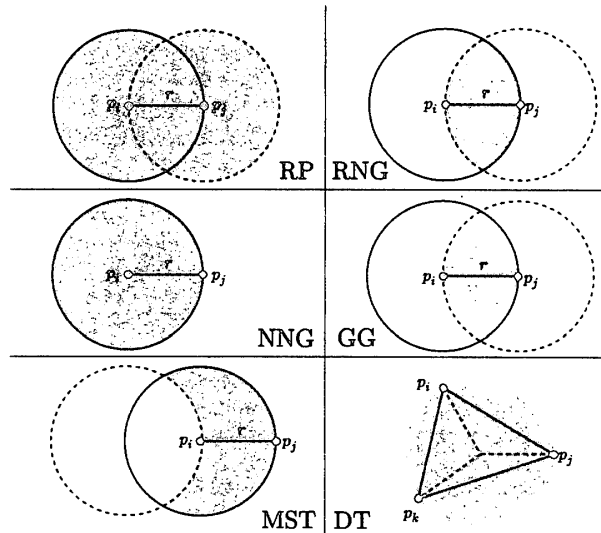


図 1: 各近接グラフの構築法に基づく探索領域

と求まり、同様に期待値と分散を導出できる。(計算過程は省略)

#### 3.1. 孤立最近接対 (RP)

互いに最も近い点である場合のみ接続する辺で構成されるグラフである。よって、 $S(r) = (4\pi/3 + \sqrt{3}/2)r^2$  を代入することで下記のように求まる。

$$f_{RP}(r) = 2 \left( \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \rho r e^{-\left(\frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rho r^2} \quad (3)$$

$$E_{RP}(R) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\rho(4\pi/3 + \sqrt{3}/2)}} \quad (4)$$

$$\simeq 0.394178 \frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad (5)$$

$$V_{RP}(R) = \frac{4 - \pi}{4\rho(4\pi/3 + \sqrt{3}/2)} \quad (6)$$

#### 3.2. 最近傍グラフ (NNG)

最も近い点へ向かう有向辺で構成されるグラフである。よって、 $S(r) = \pi r^2$  を代入することで下記のように求まる。

$$f_{NNG}(r) = 2\rho \pi r e^{-\rho \pi r^2} \quad (7)$$

$$E_{NNG}(R) = \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \quad (8)$$

$$V_{NNG}(R) = \frac{4 - \pi}{4\rho\pi} \quad (9)$$

### 3.3. 最小木 (MST)

全ての点を結ぶグラフのうちで辺の総長が最小のグラフである。構築の際には閉路ができないという条件が必要であるが、孤立しない辺の集まりであると近似的に考える。よって、 $S(r) = (\pi/3 + \sqrt{3}/2)r^2$  を代入することで下記のように求まる。

$$f_{\text{MST}}(r) = 2 \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \rho r e^{-\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rho r^2} \quad (10)$$

$$E_{\text{MST}}(R) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\rho(\pi/3 + \sqrt{3}/2)}} \quad (11)$$

$$\simeq 0.640711 \frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad (12)$$

$$V_{\text{MST}}(R) = \frac{4 - \pi}{4\rho(\pi/3 + \sqrt{3}/2)} \quad (13)$$

### 3.4. 相対近傍グラフ (RNG)

二点間を半径とする円の重複部分に点がない場合に二点間を結ぶ辺で構成されるグラフである。よって、 $S(r) = (2\pi/3 - \sqrt{3}/2)r^2$  を代入することで下記のように求まる。

$$f_{\text{RNG}}(r) = 2 \left( \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \rho r e^{-\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rho r^2} \quad (14)$$

$$E_{\text{RNG}}(R) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\rho(2\pi/3 - \sqrt{3}/2)}} \quad (15)$$

$$\simeq 0.799614 \frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad (16)$$

$$V_{\text{RNG}}(R) = \frac{4 - \pi}{4\rho(2\pi/3 - \sqrt{3}/2)} \quad (17)$$

### 3.5. ガブリエルグラフ (GG)

二点間を直径とする円が空円の場合に二点間を結ぶ辺で構成されるグラフである。よって、 $S(r) = \pi r^2/4$  を代入することで下記のように求まる。

$$f_{\text{GG}}(r) = \frac{1}{2} \rho \pi r e^{-\frac{1}{4} \rho \pi r^2} \quad (18)$$

$$E_{\text{GG}}(R) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad (19)$$

$$V_{\text{GG}}(R) = \frac{4 - \pi}{\rho \pi} \quad (20)$$

## 4. 各グラフの辺長分布

数値実験例 (母点数  $n = 1000$ , 面積  $S = 10^6 \times 10^6$ ,  $\rho = 10^{-9}$ ) について、各グラフの確率密度関数をプロットすると、図2のようなになる。RP, NNG, MST, RNG, GG, DT の順に探索領域が小さくなるほど、長さの分布が右にシフトしており、それとともに期待値と分散も大きくなっていること分かる。数値実験における理論分布との比較やその適合度検定の結果 (当日発表) から、かなり説明力が高いと言える。

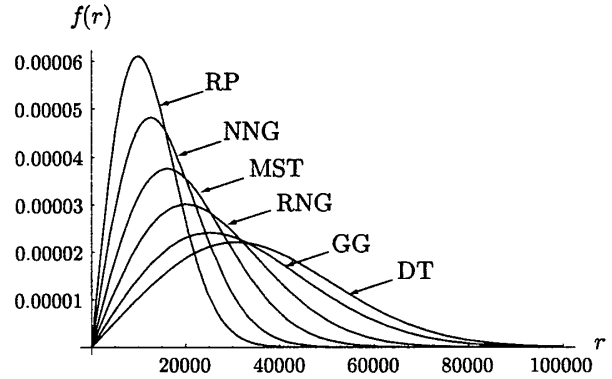


図 2: 各グラフの辺長分布

## 5. まとめと今後の展望

探索領域を限定した最近隣距離より辺長分布を導出し、グラフ間の比較を行った。新たに MST と RNG の推定を行い、RP, NNG, GG は既存研究の結果と一致した。よって、探索領域の面積のみで構築方法の異なる近接グラフの長さを推定できると言える。

巡回路を構築する上で、近接グラフの中でもドローネ網や最小木との関係が深いことは議論されている。そこで、巡回路と重複する辺との比較から巡回路の長さ推定を検討している。また、ランダムでない点分布における交通網の駅・交差点間隔の長さ分布との比較や、その成長を記述するモデルへと拡張したい。

## 参考文献

- [1] Avram, R. and Bertsimas, D., The minimum spanning tree constraint in geometrical probability and under the independent model: a unified approach, *The Annals of Applied Probability*, 2(1992), 113-130.
- [2] Clark, P. J. and Evans, F. C., Distance to nearest neighbor as a measure of spatial relationships in population, *Ecology*, 35(1954), 445-453.
- [3] Collins, R., A geometrical sum rule for two-dimensional fluid correlation functions, *Journal of Physics*, C1(1968), 1461-1471.
- [4] 古山正雄, 地域間ネットワークにおける最短結合と近接結合に関する理論的考察, *都市計画論文集*, 38(2003), 379-384.
- [5] 腰塚武志, 都市施設の密度と利用者からの距離との関係について, *都市計画論文集*, 20(1985), 43-48.
- [6] Møller, J., *Lectures on Random Voronoi Tessellations*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [7] Miles, R. E., On the homogeneous planar poisson point process, *Mathematical Biosciences*, 6(1970), 85-127.
- [8] Okabe, A., Boots, B., Sugihara, K., and Chiu, S. N., *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams. Second Edition*, John Wiley and Sons, Chichester, 2000.
- [9] Pickard, D. K., Isolated nearest neighbors, *J. Appl. Prob.*, 19(1982), 444-449.
- [10] Robert, F. D. K., Random minimal trees, *Biometrika*, 55(1968), 255-258.