日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

多段捜索割当ゲームの定常解について

01504810　防衛大学校　宝崎隆祐　HOHZAKI Ryusuke

1．はじめに

捜索空間上を移動しつつ捜索者を回避しようとする目標と，その概略の位置情報を元に手持ちの捜索資源を投入しつつ目標を見つけようとする捜索者との間で繰り返される多段捜索割当ゲームは，これまでほとんど研究されていない．このモデルは 1 段階の "捜索割当ゲーム" [1] の多段化・拡張化という側面以外にも，エラー情報を元に繰り返しデバッグ作業を行うプログラマーのバグ取りゲームのモデルと見なすこともできる．前回の報告 [2] では，非探知確率尺度におけるこのゲームの解を明示的に導出したが，ゲームの値はステージ数に対する減少性を持ちある値に収束する．今回の報告ではこの定常解について議論する．

2．モデルの前提とゲームの解

以下では，目標と捜索者が参加し離散セル空間 $\mathbb{K}=\{1,\cdots,K\}$ においてプレイされる多段確率ゲームを離散捜索時間軸で考えるが，捜索終了時刻を 0 とした残り時点数によってステージを表すものとする．

捜索者は，総捜索予算制約の下で捜索資源を各セルに投入することにより目標探知に努め，目標は，ある移動制約の下でセル間を移動することにより捜索者の探知を逃れようとする以下のゲームを考える．(1) 各時点 n の当初において，捜索者は，目標の現に存在するセル k と残存エネルギー量を知ることができる．一方，目標は，捜索者の過去の捜索資源配分及びそれまでに使用した予算を知る．(2) その後，目標はセル k からの移動を確率的に決定するが，セル k から次に移動できるセル群として $N(k)\subseteq\mathbb{K}$ の制約がある．さらに，セル $i,\ j$ 間の移動ではエネルギー $\mu(i,j)$ が消費され，手持ちエネルギーを越える移動はできない．ただし，$i\neq j$ に対し $\mu(i,j)>0$ であり，また $\mu(k,k)=0$ とし，エネルギーを消耗しても現に存在するセルに滞在し続けることは可能である．目標の保有する初期エネルギーを e_0 とする．(3) 捜索者は，次の時点における目標の移動セルを推理しつつ手持ちの残存捜索予算内で各セルへの資源配分量を決定する．単位資源量をセル i へ投入するにはコスト $c_i>0$ が必要とされる．捜索者の初期捜索予算は Φ_0 である．(4) 目標がセル i に移動した場合，そのセルに投入された捜索資源量 x により，捜索者は目標を確率 $1-q_i(x)$ で探知できる．この非探知確率を関数 $q_i(x)=\exp(-\alpha_i x)$ で与えるが，パラメータ $\alpha_i>0$ はセル i における単位捜索資源投入の探知効率を表す．目標が探知された場合，捜索者は利得 1 を得，目標は同量を失いゲームは終了する．(5) 時点 n で目標探知がなければ，時点は 1 つ進み $n-1$ となるが，最終時点 $n=0$ となればゲームは終了する．

時点 n の当初において残存エネルギー e を持ちセル k に存在する目標と，捜索予算 Φ を持つ捜索者による探知確率尺度のゲームを考える．このステージ n における目標の戦略を次にセル i に移動する確率 $p(k,i)$ の集合 $p=\{p(k,i),i\in\mathbb{K}\}$ で表すが，明らかにエネルギー制約下で移動可能なセル全体は $N(k,e)\equiv\{i\in N(k)|\mu(k,i)\leq e\}$ である．また，捜索者の戦略をセル i への投入捜索資源量 $\varphi(i,n)$ の集合 $\varphi=\{\varphi(i,n),i\in\mathbb{K}\}$ で表す．定式化と議論を容易にするために，前提 (4) の支払い仮定を「(4') ゲームが終了するまで探知されなければ目標は利得 1 を得，捜索者は同量を失う.」と変え，問題を，マキシマイザーとしての目標とミニマイザーとしての捜索者の参加する非探知確率尺度の多段確率ゲームとしよう．ここで，この時点 n 以降のゲームの値を $h(n,k,e,\Phi)$ とおけば，それは次の漸化式により評価できる．

$$h(n,k,e,\Phi)=\min_{\varphi}\ \max_{p}\sum_{i\in N(k,e)}p(k,i)\cdot h(n-1,i,e-\mu(k,i),\Phi-\textstyle\sum_j c_j\varphi(j,n))\cdot\exp(-\alpha_i\varphi(i,n)) \tag{1}$$

$$s.t.\quad p(k,i)\geq 0,\ i\in\mathbb{K},\quad \sum_{i\in N(k,e)}p(k,i)=1,\quad \varphi(i,n)\geq 0,\ i\in\mathbb{K},\quad \sum_{i\in N(k,e)}c_i\varphi(i,n)\leq\Phi\ . \tag{2}$$

$$\text{初期条件・境界条件：}\ h(0,k,e,\Phi)=1,\ \ h(n,k,e,0)=1,\ \ h(n,k,0,\Phi)=\exp(-\alpha_k\Phi/c_k)\ . \tag{3}$$

この多段ゲームの値は次のような繰り返し計算により与えられることを前回の報告で明らかにした．

定理 1 $h(n,k,e,\Phi)$ は常に存在し，次式のような表現形をもつ．

$$h(n,k,e,\Phi)=\exp(-\Phi/\gamma_n(k,e))\ . \tag{4}$$

ただし，$n=1$ に対する $\gamma(\cdot)$ の初期値は $\gamma_1(k,e)=\sum_{j\in N(k,e)}c_j/\alpha_j$ であり，一般のステージ n における値 $\gamma_n(k,e)$ は以下の計算による．まず，ステージ $n-1$ における $\{\gamma_{n-1}(j,e-\mu(k,j)),\ j\in N(k,e)\}$ の値を降下順に並べたものを $\gamma_{n-1}(k_1,e-\mu(k,k_1))\geq\gamma_{n-1}(k_2,e-\mu(k,k_2))\geq\cdots\geq\gamma_{n-1}(k_m,e-\mu(k,k_m))$ （m は，$N(k,e)$ のセル数 $|N(k,e)|$）とする．

(i) $1 > \sum_{i\in N(k,e)} c_i/\alpha_i/\gamma_{n-1}(i, e-\mu(k,i))$ ならば，$\gamma_n(k,e) = \displaystyle\sum_{i\in N(k,e)} c_i/\alpha_i$ とし，目標の移動対象となるセル群及び捜索者の捜索資源の投入対象となるセル群は $N(k,e)$ のすべてのセルとなる．

(ii) そうでなければ，$s_n^* = \min\left\{ s \;\middle|\; 1 \le \displaystyle\sum_{\tau=1}^{s} \frac{c_{k_\tau}/\alpha_{k_\tau}}{\gamma_{n-1}(k_\tau, e-\mu(k,k_\tau))} \right\}$ なる $s_n^* \in \{1,\cdots,m\}$ により，

$$\gamma_n(k,e) = \gamma_{n-1}(k_{s_n^*}, e-\mu(k,k_{s_n^*}))\left(1 - \sum_{\tau=1}^{s_n^*-1} \frac{c_{k_\tau}/\alpha_{k_\tau}}{\gamma_{n-1}(k_\tau, e-\mu(k,k_\tau))}\right) + \sum_{\tau=1}^{s_n^*-1} \frac{c_{k_\tau}}{\alpha_{k_\tau}}$$

とし，目標の移動対象セル群及び捜索資源投入対象セル群は $\{k_1, k_2, \cdots, k_{s_n^*}\}$ となる．

3．ゲームの値の収束と定常解

係数 $\gamma_n(k,e)$ は，残りステージ数 n，目標セル k と残存エネルギー e を考慮した上で，捜索予算 Φ が非探知確率という評価尺度に関してもつ効率性を示す総合指数となっており，Φ が一定の場合には，この γ 値が大きければ非探知確率も大きく，小さければ非探知確率も小さい．この値の性質として次の系が言える．

系 1 *(i)* ステージ数 n に対する単調非増加性： $\gamma_n(k,e) \ge \gamma_{n+1}(k,e)$.

(ii) 定理 *1* において降順に並べた $\gamma_{n-1}(k_s, e-\mu(k,k_s))$, $s=1,\cdots,m$ のステージ数 n に対する単調非増加性：

$$\gamma_n(k_s, e-\mu(k,k_s)) \ge \gamma_{n+1}(k'_s, e-\mu(k,k'_s)),\ s=1,\cdots,m\ .$$

(iii) 定理 *1* のケース *(ii)* で最適解が決まる場合，$k = k_{\widetilde{s}_n}$ とすると次式のいずれかが成り立つ．

$$\widetilde{s}_n = s_n^* = 1\ ,\ \text{または}\ \ \widetilde{s}_n < s_n^*\ .$$

(iv) 下限値： $\gamma_n(k,e) \ge c_k/\alpha_k$.

性質 (i),(iv) により，γ 値は n とともに小さくなりつつ，存在セルの“探知効率コスト”c_k/α_k より大きな値に収束する．また性質 (ii) により，目標の移動対象セル群，捜索資源投入対象セル群は n が大きな場合には限定されているが，小さくなると拡大される傾向にある．

ここでエネルギー制約の無い場合 $(e_0 = \infty)$ の γ 値の収束について議論するため，全セル群 $\boldsymbol{K}$ を次のような同値関係により分類する．セル l が，移動可能セル群 $N(k)$ の連接によりセル k からいつかは到達可能である場合，関係 $k \mapsto l$ で表現しよう．セル k からの到達可能セル群は $R(k) \equiv \{l \in \boldsymbol{K} | k \mapsto l\}$ で定義できる．お互いが到達可能セルとなっている関係は同値関係であり，この関係により全セル群 $\boldsymbol{K}$ を分類した同値類の集合を L_1, L_2, $\cdots$, L_u とする．さらに，これら同値類を到達可能性 $\mapsto$ によりトポロジカル・ソートした結果，L_{u_1}, $\cdots$, L_{u_w} からは到達可能な他の類がないものとする．このとき，$\gamma(k,e)$ から引数 e は除去した γ 値に関し次の系が得られる．

系 2 *(i)* 下限値： $\gamma_n(k) \ge \displaystyle\min_{j\in R(k)} \gamma_1(j)$.

(ii) $\gamma_1(i_{u_k}^*) = \min_{j\in L_{u_k}} \gamma_1(j)$ であるセル $i_{u_k}^*$, $k=1,\cdots,w$, の γ 値の不変性：

$$\gamma_n(i_{u_k}^*) = \gamma_1(i_{u_k}^*) = \sum_{j\in N(i_{u_k}^*)} \frac{c_j}{\alpha_j}\ ,\ k=1,\cdots,w\ .$$

(iii) 特に，どのセルからも他のセルへの移動ができない場合（$N(k)=\{k\}$），常に $\gamma_n(k) = c_k/\alpha_k$ である．また，どのセルからも任意のセルに移動可能である場合（$N(k) = \boldsymbol{K}$），セルに依らず一定値 $\gamma_n(k) = \sum_{j\in\boldsymbol{K}} c_j/\alpha_j$ となる．

4．まとめ

ステージ数 n が小さな場合の分析により，残り少ないプレイの機会しかないゲームの過渡的状態が把握できるのに対し，n が大きな場合の本報告での議論により，ゲームの定常的な状態が推測できる．なお，紙数の関係上，数値例については発表会当日紹介する．

参考文献

[1] R. Hohzaki, K. Iida and T. Komiya, *JORSJ*, **45**(1), pp.93–108, 2002.3.
[2] 宝崎, 日本ＯＲ学会 2003 年度秋季研究発表会アブストラクト集, pp.334-335, 2003.9.