双協力ゲームにおける提携の生起確率が等しいときの確率値

01308524 大阪大学大学院 *鶴見 昌代 TSURUMI Masayo
大阪大学 西村 明子 NISHIMURA Akiko
01009544 大阪大学大学院 乾口 雅弘 INUIGUCHI Masahiro

1. はじめに

通常の協力ゲームにおいて各プレイヤーの意思決定は，提携に参加するかどうか二者択一なものとして議論されている．これに対し，提携に参加するか，参加しないか，あるいはそのどちらでもないかという三者択一な場合を扱う協力ゲームとして，双協力ゲーム (bicooperative game) が考えられた [1]．本研究では，プレイヤー i を含まないすべての提携の生起確率が等しいと考えられるときの双協力ゲームにおける確率値 [2] をそのプレイヤーに対する解として提案し，その公理化を行い，数値例を与える．

2. 通常の協力ゲームにおける解

通常の協力ゲームは，プレイヤーの集合を $N=\{1,2,\ldots,n\}$ するとき，$v(\emptyset)=0$ を満たす $v:2^N\to\mathbb{R}$ で定義される．このとき，関数値 $v(S)$ は，$S\in 2^N$ が得られる最大利益または最小費用を表すものと考えられる．このようなゲームすべてからなる集合を $\mathcal{G}$ と表す．確率値は，次のように定義されている．

定義 1 $\bar{p}^i_S\geq 0$, $\sum_{S\in 2^{N\setminus\{i\}}}\bar{p}^i_S=1$ と次式を満たす $\{p^i_S\}_{S\in 2^{N\setminus\{i\}}}$ が存在するとき，$\mathcal{G}$ 上の値 Φ_i は，プレイヤー $i\in N$ の確率値 (probabilistic value) と呼ばれる．

$$\Phi_i(b)=\sum_{S\in 2^{N\setminus\{i\}}}p^i_S(v(S\cup\{i\})-v(S))$$

協力ゲームにおける重要な解である Shapley 値や Banzhaf 値は確率値であり，Banzhaf 値は任意の $S\in 2^{N\setminus\{i\}}$ に対して p^i_S が等しいときの確率値であることが知られており，次のように与えられる．

$$\beta_i(v)=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i\in N}\sum_{S\in 2^{N\setminus\{i\}}}(v(S\cup\{i\})-v(S))$$

3. 双協力ゲームとその解

双協力ゲームを定義する．複数のプレイヤーが存在して，各プレイヤーが賛成，反対，それ以外の選択ができる状況を考える．双協力ゲームは，プレイヤーの集合を $N=\{1,2,\ldots,n\}$ とするとき，$S,T\subseteq N, S\cap T=\emptyset$ を満たす提携の組 (S,T) を用いて定義される．S は提携に参加しているプレイヤーの集合，T は提携に参加していないプレイヤーの集合，$N\setminus(S\cup T)$ は中立的なプレイヤーの集合と考えることができる．このような提携のすべてからなる集合は 3^N と表すことができる．Bilbao ら [1, 2, 3] は，$b(\emptyset,\emptyset)=0$ を満たす $b:3^N\to\mathbb{R}$ を双協力ゲームと定義した．双協力ゲームすべてからなる集合を $\mathcal{BG}$ と表す．

Grabisch and Labreuche [4] は，次の 3^N 上の関係を定義している．

$$(A,B)\sqsubseteq(C,D)\iff A\subseteq C, B\supseteq D$$

これを用いて，Bilbao ら [2, 3] は，$(S,T)\neq(\emptyset,\emptyset)$ を満たす $(S,T)\in 3^N$ に対して次の特別な双協力ゲームを定義している．

1. 上位全員一致ゲーム (superior unanimity game)
$$\bar{u}_{(S,T)}(A,B)=\begin{cases}1, & \text{if } (A,B)\sqsupseteq(S,T),(A,B)\neq(\emptyset,\emptyset),\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$
2. 下位全員一致ゲーム (inferior unanimity game)
$$\underline{u}_{(S,T)}(A,B)=\begin{cases}-1, & \text{if } (A,B)\sqsubseteq(S,T),(A,B)\neq(\emptyset,\emptyset),\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$
3. アイデンティティ・ゲーム (indentity game)
$$\delta_{(S,T)}(A,B)=\begin{cases}1, & \text{if } (A,B)=(S,T),\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

$\{\delta_{(S,T)}\mid(S,T)\in 3^N,(S,T)\neq(\emptyset,\emptyset)\}$，$\{\bar{u}_{(S,T)}\mid(S,T)\in 3^N,(S,T)\neq(\emptyset,\emptyset)\}$，$\{\underline{u}_{(S,T)}\mid(S,T)\in 3^N,(S,T)\neq(\emptyset,\emptyset)\}$ は，それぞれ $\mathcal{BG}$ の基底をなすことが知られている．

Bilbao らは，双協力ゲームにおける確率値，Shapley 値，compatible-order value などを提案し，その公理系を明らかにしている [2, 3]．確率値は次のように定義されている．

定義 2 [2] $\bar{p}^i_{(S,T)}\geq 0$, $\sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}}\bar{p}^i_{(S,T)}=1$, $\underline{p}^i_{(S,T)}\geq 0$, $\sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}}\underline{p}^i_{(S,T)}=1$ と次式を満たす $\{\bar{p}^i_{(S,T)}\}_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}}$ と $\{\underline{p}^i_{(S,T)}\}_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}}$ が存在するとき，プレイヤー $i\in N$ に対する $\mathcal{BG}$ 上の値 Φ_i は，確率値 (probabilistic value) と呼ばれる．

$$\Phi_i(b)=\sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}}[\bar{p}^i_{(S,T)}(b(S\cup\{i\},T)-b(S,T))+\underline{p}^i_{(S,T)}(b(S,T)-b(S,T\cup\{i\}))]$$

プレイヤーが反対から中立，中立から賛成に意見を変更していく過程は，極大鎖 (maximal chain) で表すことができる．Bilbao ら [3] は，Shapley 値を極大鎖におけるプレイヤーの貢献度に基づいて各極大鎖が等確率で生起すると仮定した下での，最大鎖におけるプレイヤーの貢献度の期待値として定義している．

4. 新しい解の概念とその公理系

通常の協力ゲームにおける Banzhaf 値は任意の $S\in 2^{N\setminus\{i\}}$ に対して $p^i_{(S,T)}$ の値が等しいときの $\mathcal{G}$ 上

の確率値であることが知られている．そこで，$\overline{p}^i_{(S,T)}$ と $\underline{p}^i_{(S,T)}$ の値がすべて等しいときの $\mathcal{BG}$ 上の確率値を解 β_i として提案する．すなわち，各 $b \in \mathcal{BG}$ に対する β は次のように定義される．

$$\beta_i(b) = \frac{1}{3^{n-1}} \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}} (b(S\cup\{i\},T) - b(S,T\cup\{i\}))$$

各双協力ゲームに対して，プレイヤー $i \in N$ が得られるべき利益（または負担すべきコスト）を与える関数 $f_i : \mathcal{BG} \to \mathbb{R}$ が満たすべき性質として，次のような公理を考える．

公理 1 （線形性）
任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ と任意の $b, w \in \mathcal{BG}$ に対して $f_i(\alpha b + \beta w) = \alpha f_i(b) + \beta f_i(w)$ である．

確率値は線形性を満たす．したがって，Shapley 値も線形性を満たす．

双協力ゲームにおけるナルプレイヤーの定義は，任意の $(S,T) \in 3^{N\setminus\{i\}}$ に対して $b(S\cup\{i\},T) - b(S,T) = 0$ かつ $b(S,T) - b(S,T\cup\{i\}) = 0$ が成り立つことであると考えられる．この定義を緩和して，弱ナルプレイヤーを定義する．任意の $(S,T) \in 3^{N\setminus\{i\}}$ に対して $b(S\cup\{i\},T) - b(S,T\cup\{i\}) = 0$ が成り立つとき，i を $b \in \mathcal{BG}$ での弱ナルプレイヤーと呼ぶ．

公理 2 （弱ナルプレイヤーの性質）
i が $b \in \mathcal{BG}$ で弱ナルプレイヤーならば，$f_i(b) = 0$ となる．

ナルプレイヤーの定義が緩和されているため，公理としてはナルプレイヤーの性質より厳しいものになっている．

通常のゲームにおける Banzhaf 値が満たす性質に独裁者に関する性質がある．この性質を双協力ゲームに拡張すると，次の性質が考えられる．

公理 3 （独裁者に関する性質）
$f_i(\bar{u}_{(\{i\},N\setminus\{i\})}) = 1, f_i(\underline{u}_{(N\setminus\{i\},\{i\})}) = -1$

公理 4 （アイデンティティ・ゲームに関する性質）
$i \in S, i \in S'$ となる任意の $(S,T) \in 3^N, (S',T') \in 3^N$ に対して $f_i(\delta_{(S,T)}) = f_i(\delta_{(S',T')})$ となり，かつ，$i \in T, i \in T'$ となる任意の $(S,T) \in 3^N, (S',T') \in 3^N$ に対して $f_i(\delta_{(S,T)}) = f_i(\delta_{(S',T')})$ となる．

公理 5 （二つのゲームの関係に関する性質）
$\sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}}\{b(S\cup\{i\},T) - b(S,T)\}$
$= \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}}\{b'(S\cup\{i\},T) - b'(S,T)\}$ かつ
$\sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}}\{b(S,T) - b(S,T\cup\{i\})\}$
$= \sum_{(S,T)\in 3^{N\setminus\{i\}}}\{b'(S,T) - b'(S,T\cup\{i\})\}$ を満たす任意の $b, b' \in \mathcal{BG}$ に対して $f_i(b) = f_i(b')$ である．

定理 1 公理 1-4 を満たす関数 $f_i : \mathcal{BG} \to \mathbb{R}$ は唯一存在して，β_i である．

定理 2 公理 1-3 と 5 を満たす関数 $f_i : \mathcal{BG} \to \mathbb{R}$ は唯一存在して，β_i である．

例 1 $N = \{1,2,3,4\}$ とする．

$$b(S,T) = \begin{cases} 0 & \text{if } i \in T \text{ or } 1 \in N\setminus(S\cup T) \\ 3 & 1 \in S, 4 \in T \\ 9 & 1 \in S, 4 \notin T \end{cases}$$

とする．双協力ゲーム b における Banzhaf 値は $\beta_1(b) = 7$ となる．任意の $S \in 2^{N\setminus\{1\}}$ に対して $v(S) = b(S, N\setminus S)$ とすると，このとき，プレイヤー 1 の Banzhaf 値は $\beta_1(v) = 6$ となり，任意の $S \in 2^{N\setminus\{1\}}$ に対して $v'(S) = b(S,\emptyset)$ とすると，プレイヤー 1 の Banzhaf 値は $\beta_1(v') = 9$ となる．

v における $S \in 2^{N\setminus\{1\}}$ での貢献度 $v(S\cup\{1\}) - v(S) = b(S\cup\{1\}, N\setminus(S\cup\{1\})) - b(S, N\setminus(S\cup\{1\}))$ の平均が b における $(S,T) \in 3^{N\setminus\{1\}}$ での貢献度 $b(S\cup\{1\},T) - b(S,T\cup\{1\})$ の平均よりもこの例では小さくなっている．このために協力ゲーム v における Banzhaf 値が双協力ゲーム b における Banzhaf 値よりも大きくなっている．

一方，v' における $S \in 2^{N\setminus\{1\}}$ での貢献度 $v'(S\cup\{1\}) - v(S) = b(S\cup\{1\},\emptyset)) - b(S,\emptyset))$ の平均が b における $(S,T) \in 3^{N\setminus\{1\}}$ での貢献度の平均よりも大きくなっている．このために協力ゲーム v' における Banzhaf 値が双協力ゲーム b における Banzhaf 値よりも大きくなっている．

5. おわりに

本研究では，プレイヤー i を含まないすべての提携が等確率で生じると考えられるときの双協力ゲームにおける確率値をそのプレイヤーに対する解として提案し，その公理化を行い，数値例を与えた．

参考文献

[1] Bilbao, J.M., Cooperative Games on Combinatorial Structures, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 2000.

[2] Bilbao, J.M., Fernández, J.R., Jiménez, N., López, J.J., Probablistic values for bicooperative games, Working Paper, University of Seville (2004)

[3] Bilbao, J.M., Fernández, J.R., Jiménez, N., López, J.J., The Shapley value for bicooperative games, Working Paper, University of Seville (2004)

[4] Grabisch, M. and Ch. Labreuche, Bi-capacities, Working paper, University of Paris VI, 2002.