Jordan標準形によるPH分布の陽表現

02103790　神奈川大学　*岸 康人　KISHI Yasuhito
01102990　神奈川大学　紀 一誠　KINO Issei

1. はじめに

PH 分布を支配する subgenerator Q の固有値は PH 分布の性質を調べる際に重要な役割をはたす．従来の研究では，いくつかの限定された場合については，その密度関数が陽な形で与えられているが，一般的な場合については，密度関数の下限が係数付きの Erlang 分布で与えられているのみである．また，PH 分布の表現 (a, Q) には，冗長性があり，同じ分布でもその表現には自由度がある．これらの問題を解決するため，本稿では Jordan 標準形を用いて Q を表し，陽な形で確率密度関数を得る．

2. PH 分布の表現と密度関数

PH 分布：吸収状態 $\{0\}$，一時的状態 $I_M = \{1, 2, \ldots, M\}$ をもつ吸収マルコフ過程を $\{X(t), 0 \leq t\}$ とし，その推移速度行列を

(1) $$Q^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ q & Q \end{bmatrix},$$

初期分布を

(2) $$a = (a_1, a_2, \ldots, a_M)$$

とする．このマルコフ過程 $\{X(t)\}$ が吸収状態に達するまでの時間分布を PH 分布といい，(a, Q) を PH 分布の表現という．また，Q を subgenerator と呼ぶものとする．推移速度行列の性質から，${}^t q = (q_{10}, q_{20}, \ldots, q_{M0})$，$q_{i0} \geq 0$，$i \in I_M$ であり，$q_{ii} < 0 (i \in I_M)$，$q_{ij} \geq 0 (Q = (q_{ij}), i \neq j \in I_M)$，$q + Q\mathbb{1} = \mathbb{0}$ である．ただし，$\mathbb{1} = {}^t(1, 1, \ldots, 1)$ である．

密度関数：PH 分布 (a, Q) の確率密度関数は形式的には次のようになる．

(3) $$f(t) = a \exp(Qt) q, \quad 0 < t.$$

一般に，密度関数が与えられたときの PH 分布の表現は一意ではない．上式は，行列の無限級数を含んでおり，密度関数，分布関数が陽な形で表現されているとはいえない．

3. Jordan 標準形による密度関数の陽表現

固有多項式と最小多項式：いま，Q の固有多項式 $f_Q(t)$ および最小多項式 $g_Q(t)$ がそれぞれ

$$f_Q(t) = \prod_{i=1}^{N_r} (t - \lambda_i)^{n_{ri}} \prod_{i=1}^{N_c} (t - \sigma_i)^{n_{ci}} (t - \bar{\sigma}_i)^{n_{ci}}$$

$$g_Q(t) = \prod_{i=1}^{N_r} (t - \lambda_i)^{m_{ri}} \prod_{i=1}^{N_c} (t - \sigma_i)^{m_{ci}} (t - \bar{\sigma}_i)^{m_{ci}}$$

である場合を考える．ここで，固有値 $\lambda_i \in \mathbb{R} (i = 1, \ldots, N_r)$，$\sigma_i \in \mathbb{C} (i = 1, \ldots, N_c)$，$\bar{\sigma}_i$ は σ_i と複素共役とし，$m_{ri}, m_{ci}, n_{ri}, n_{ci}$ は自然数であり，$m_{ri} \leq n_{ri}, m_{ci} \leq n_{ci}$ とする．ただし，最小多項式とは，$g_Q(Q) = \mathbb{O}$ となる多項式の中で，次数が最低で，最高次の係数が 1 であるものである．

Q の Jordan 標準形：Q は，以下のように書ける．

$$Q = UJV, J = \bigoplus_{i=1}^{N_r} J(\lambda_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{N_c} J(\sigma_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{N_c} J(\bar{\sigma}_i)$$

$J(\lambda_i)$，$J(\sigma_i)$，$J(\bar{\sigma}_i)$ は，それぞれの固有値に対する Jordan 標準形で，

$$J(\lambda_i) = \bigoplus_{k=1}^{m_{ri}} \bigoplus_{\ell=1}^{\ell(\lambda_i, k)} J_\ell(\lambda_i, k)$$

$J_\ell(\lambda_i, k)$ は，固有値 λ_i に関する次数 k の ℓ 番目の Jordan cell で，$\ell(\lambda_i, k)$ は，固有値 λ_i の k 次の Jordan cell の個数．

$$J(\lambda, k) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \mathbb{I}_k + \mathbb{N}_k \quad ,$$

ただし，$\mathbb{I}_k$ は，k 次の単位行列，$\mathbb{N}_k$ は，$(\mathbb{N}_k)^k = \mathbb{O}$ となるべき零行列，

$$\mathbb{N}_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

である．また，$\bigoplus_{\ell=1}^{n} \boldsymbol{A}_\ell$ は，ブロック対角行列，

$$\bigoplus_{\ell=1}^{n} \boldsymbol{A}_\ell = \boldsymbol{A}_1 \oplus \boldsymbol{A}_2 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}_n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_n \end{bmatrix}$$

を表す．$\sigma_i, \bar{\sigma}_i$ についても同様．

ここで，$\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ は，それぞれ Jordan cell の右固有ベクトル，左固有ベクトルから構成される行列であり，固有値との対応で，

$$\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{U}(\lambda), \boldsymbol{U}(\sigma), \boldsymbol{U}(\bar{\sigma})],$$
$$\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{V}(\lambda), \boldsymbol{V}(\sigma), \boldsymbol{V}(\bar{\sigma})]^t$$

と書けて，

$$\boldsymbol{UV} = \boldsymbol{I}$$

となるように，$\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ をとることができる．さらに，Jordan cell との対応から，

$$\boldsymbol{U}(\lambda) = \left\{ \left\{ \{\boldsymbol{U}_\ell(\lambda_i, k)\}_{\ell=1}^{\ell(\lambda_i,k)} \right\}_{k=1}^{m} \right\}_{i=1}^{N_r},$$

$$\boldsymbol{U}_\ell(\lambda_i, k) = \left\{ \boldsymbol{u}_j^{(\ell)}(\lambda_i, k) \right\}_{j=1}^{k}$$

$$\boldsymbol{V}(\lambda) = \left[\left[[\boldsymbol{V}_\ell(\lambda_i, k)]_{\ell=1}^{\ell(\lambda_i,k)} \right]_{k=1}^{m} \right]_{i=1}^{N_r},$$

$$\boldsymbol{V}_\ell(\lambda_i, k) = \left[\boldsymbol{v}_j^{(\ell)}(\lambda_i, k) \right]_{j=1}^{k}$$

のように表される．ただし，$\boldsymbol{u}_j^{(\ell)}(\lambda, k), \boldsymbol{v}_j^{(\ell)}(\lambda, k)$ を，それぞれ ℓ 番目の k 次の Jordan cell に対応する j 番目の右および左一般固有ベクトルとする．

密度関数の陽表現：(3) 式の密度関数は，前項の Jordan 標準形を使って，以下のように，行列の無限級数を含まない陽な形に書き直すことができる．

$$f(t) = \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{n=0}^{m_{ri}-1} \frac{t^n}{n!} e^{\lambda_i t} \alpha_n(\lambda_i) + \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{n=0}^{m_{ci}-1} \frac{t^n}{n!} e^{\mu(\sigma_i)t} \psi_n(\sigma_i, t)$$
$$= (\text{Erlang 分布の線形結合}) + (\text{Ripple Terms}).$$

ここで，

$$\alpha_n(\lambda_i) = \sum_{k=n+1}^{m_{ri}} \sum_{\ell=1}^{\ell(\lambda_i,k)} \sum_{s=1}^{k-n} g_s^{(\ell)}(\lambda_i, k) \cdot h_{s+n}^{(\ell)}(\lambda_i, k),$$

$$\psi_n(\sigma_i, t) = 2r_n(\sigma_i) \cos\{\nu(\sigma_i)t + \varphi_n(\sigma_i)\},$$

また，

$$g_j^{(\ell)}(\lambda_i, k) = \left(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_j^{(\ell)}(\lambda_i, k) \right),$$

$$h_j^{(\ell)}(\lambda_i, k) = \left(\boldsymbol{v}_j^{(\ell)}(\lambda_i, k), \boldsymbol{q} \right),$$

(σ_i, $\bar{\sigma}_i$ に関しても同様．)

$$\nu(\sigma_i) = \mathrm{Im}(\sigma_i), \mu(\sigma_i) = \mathrm{Re}(\sigma_i),$$

$$\delta_n(\sigma_i) = \sum_{k=n+1}^{m_{ci}} \sum_{\ell=1}^{\ell(\sigma_i,k)} \sum_{s=1}^{k-n} g_s^{(\ell)}(\sigma_i, k) \cdot h_{s+n}^{(\ell)}(\sigma_i, k),$$

$$r_n(\sigma_i) = |\delta_n(\sigma_i)|, \varphi_n(\sigma_i) = \arg \delta_n(\sigma_i),$$

$$\delta_n(\sigma_i) = r_n(\sigma_i) e^{\varphi_n(\sigma_i)i},$$

である．

この密度関数の形から，本質的に影響を与えるのは，subgenerator$\boldsymbol{Q}$ の固有多項式の次数ではなく，最小多項式の次数であることがわかる．

4. 数値例

次のような表現 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{Q})$ をもつ PH 分布を考える．

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -1.2 & 0.5 & 0.6 \\ 0.3 & -1.2 & 0.7 \\ 1.0 & 0.1 & -1.5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a} = (0.3, 0.5, 0.2)$$

subgenerator $\boldsymbol{Q}$ は，次のような固有値をもち，最小多項式の次数は全て 1 である．

$\lambda = -0.2248$,

$\sigma = -1.8376 + 0.13038i, \bar{\sigma} = -1.8376 - 0.13038i$

このとき，密度関数は次のようになる．

$$f(t) = 0.22e^{-0.22t} + 0.21 \cdot \cos(-1.63 + 0.13t)e^{-1.83t}$$