日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

資産の数が３つの場合の平均分散分析でリスクフリーなポートフォリオが存在する条件について

01504364　近畿大学経営学部　林 芳男　HAYASHI Yoshio

(本文)投資対象を 1 から n の番号を付けて識別するとして各資産 j $(=1,\cdots,n)$ の収益率 X_j は(平均,分散)の組(μ_j, $\sigma_j{}^2$)が存在する確率変数でそれらの分散･共分散行列は $Q=(q_{ij})$ と与えられているとする。つまり、$q_{ij}=Cov(X_i, X_j)$ で言うまでもなく $q_{jj}=\sigma_j{}^2$ である（$j=1,\cdots,n$）。これらの資産のポートフォリオＰを賢く組んで期待収益率が同じであるならばリスク(=標準偏差)が最小なものに投資するのが合理的であるというのがマコービッツの問題設定である。それらの資産の組み入れ比率のベクトルが $\boldsymbol{x}=(x_j)$ の平均値を $\mu_{\boldsymbol{x}}$,標準偏差を $\sigma_{\boldsymbol{x}}$ で表すと(平均,分散)**効率的なポートフォリオ** $\boldsymbol{x}$ とは投資家が期待する与えられた収益率 μ を持つポートフォリオの中で分散が最小なものを指す。効率的なポートフォリオは次の数理計画問題の最適解として得られる。

目的関数：　$(\sigma_{\boldsymbol{x}}{}^2=)\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Q\boldsymbol{x}\to$最小化　(1.1)

制約条件：　$\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\mu,$　(1.2)

$\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1,$　(1.3)

$\boldsymbol{x}\geqq\boldsymbol{0}$　(1.4)

ここに、$\boldsymbol{1}$ は成分が 1 だけの n 次元ベクトルで**空売り禁止条件**(1.4)がなければ、勿論、その条件を外して解くべきである。

リスクフリーなポートフォリオを構成する問題は数学の問題としては単純で連立方程式

$Q\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$　(1.7)

(1.3)、空売りが禁止されているときは更に(1.4)

を解くことである。非負性条件(1.4)が無ければこれは単に Q が正則でないということである。

去年の発表(林(2004))では、実用性には少し問題があったがその一般の場合の必要十分条件を得て $n=3$ の場合に応用した。今回の発表では $n=3$ の場合を直接的に初等的に解き同様な結果を導く。$n=3$ の場合が、$n=2$ の場合(福井(1998)参照)同様に、一変数の二次関数の最小化問題に帰着できたことは驚きである。

その三つの資産の収益率を X, Y, Z で表す。このときその分散･共分散行列 Q は

$$Q=\begin{pmatrix}\sigma_X{}^2 & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ}\\ \sigma_{XY} & \sigma_Y{}^2 & \sigma_{YZ}\\ \sigma_{ZX} & \sigma_{ZY} & \sigma_Z{}^2\end{pmatrix} \qquad (4.0)$$

で与えられる。Q が非負定値であることから自明に成立する不等式は通常のコーシー･シュワルツの不等式(=相関係数の絶対値が 1 以下ということ)も含めた

$$det(Q)=\sigma_X{}^2\sigma_Y{}^2\sigma_Z{}^2+2\sigma_{XY}\sigma_{YZ}\sigma_{ZX}-\sigma_X{}^2\sigma_{YZ}{}^2-\sigma_Y{}^2\sigma_{ZX}{}^2-\sigma_{XY}{}^2\sigma_Z{}^2\geqq 0 \qquad (4.1)$$

である。この行列式の計算は容易である。$det(Q)>0$ の場合はリスクフリーなポートフォリオは存在しないからここで考察するのは $det(Q)=0$ の場合だけである。X, Y, Z を α, β, γ の比率で投資するポートフォリオＰの平均 μ_P と標準偏差 σ_P はそれぞれ

$$\mu_P=\alpha\mu_X+\beta\mu_Y+\gamma\mu_Z \qquad (4.2)$$

$$\sigma_P{}^2=\alpha^2\sigma_X{}^2+\beta^2\sigma_Y{}^2+\gamma^2\sigma_Z{}^2+2\alpha\beta\sigma_{XY}+2\beta\gamma\sigma_{YZ}+2\gamma\alpha\sigma_{ZX} \qquad (4.3)$$

となる。ここに、

$$\alpha+\beta+\gamma=1\ (,\ \alpha, \beta, \gamma\geqq 0) \qquad (4.4)$$

である。資産の数が 2 の場合に初等的な展開で完全解が得られた理由はその分散最小化問題が混合比

率pだけの一変数の問題であったからである。ここでは(4.2),(4.4)でγだけを自由変数として扱いα,βが一意に決まる場合に帰着させて解決を図る。(4.2),(4.4)は

$$\mu_X\alpha+\mu_Y\beta=\mu_P-\gamma\mu_Z \qquad (5.1)$$

$$\alpha+\quad\beta=1-\gamma \qquad (5.2)$$

と書き換えることができる。これをαとβについての連立方程式と見るとその解が一意に決定するための必要十分条件は

$$det\begin{pmatrix}\mu_X & \mu_Y\\ 1 & 1\end{pmatrix}\neq 0\text{、つまり、}\mu_X\neq\mu_Y \qquad (5.3)$$

である。この条件が成立すればαとβは

$$\alpha=\frac{(\mu_P-\mu_Y)-\gamma(\mu_Z-\mu_Y)}{\mu_X-\mu_Y},\ \beta=\frac{(\mu_X-\mu_P)-\gamma(\mu_X-\mu_Z)}{\mu_X-\mu_Y} \qquad (5.4)$$

と一意に決まる。このアプローチは三つの資産の内のどれか二つの平均収益率が同じでなければそれらをXとYと呼ぶことで取ることが出来る。この仮定が成り立たないのはすべての平均収益率が等しいときでそのときは分散が最小のものにだけ投資するのが正解であるから自明でつまらない場合である。こうして決まったαとβを(4.3)に代入すればポートフォリオPの分散$\sigma_P{}^2$はγだけを変数とする関数$f(\gamma)$と見ることができるから容易に最小化することができる。ただまともに代入してしまっては式が煩雑で計算が面倒になるから係数を適当な記号で置き換えるなどの工夫は必要になる。(5.3)という条件の下でαとβはγの線形関数なのでa,b,c,dを適当な定数として

$$\alpha=a\gamma+b,\ \beta=c\gamma+d \qquad (5.5)$$

と表すことができる。ここに、その係数は(5.4)から

$$a=\frac{\mu_Y-\mu_Z}{\mu_X-\mu_Y},\ b=\frac{\mu_P-\mu_Y}{\mu_X-\mu_Y},\ c=\frac{\mu_Z-\mu_X}{\mu_X-\mu_Y},\ d=\frac{\mu_X-\mu_P}{\mu_X-\mu_Y} \qquad (5.6)$$

と定まるものである。ここに、aとcはμ_Pに依存しない定数であるのに対してbとdはμ_Pに関して反対方向に比例する量であることには注目しておきたい。ところで(5.3)という仮定の下では

$$ad-bc\neq 0 \qquad (5.7)$$

であることを注意しておく。分散$f(\gamma)=\sigma_P{}^2$を丁寧に計算すると

$$f(\gamma)=\sigma_W{}^2\gamma^2+2\sigma_{WU}\gamma+\sigma_V{}^2 \qquad (5.9)$$

を得る。ここに、W, U, Vは

$$W=aX+cY+Z,\ U=bX+dY+Z\ V=bX+dY \qquad (5.10)$$

で定義される確率変数である。この二次関数を最小化することで有用な結果が得られる。その結果及び(5.9)を導く過程、それらの確率変数が意味することは発表会場でお見せします。

(参考文献)

林 芳男「平均分散分析でリスクフリーなポートフォリオが存在する条件について」2004年度日本ＯＲ学会春季研究発表会予稿集

福井 幸男著「知の統計学３、生命保険から証券投資、会計監査まで」共立出版株式会社1998年刊

Harry M. Markowitz 著 ,Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments, John-Wiley & Sons, Inc. New York, N.Y.(Cowles Foundation for Research in Economics at Yale Univ.)1959(鈴木 雪夫監訳「ポートフォリオ選択論」東洋経済新報社、昭和44年)

R.C. Merton,"An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier," Journal of Financial and Quantitative Analysis, September 1972, pp.1851-1872.