

修正ANP法の解の定義について

01105803 愛知学院大学 岸 善徳 KISHI Yoshinori

1. はじめに

サーティはAHPにおける階層構造をネットワーク構造に拡張したANP[3] (Analytic Network Process) を提案した。しかし、超行列のマルコフ性が原因で異常な結果が出ている[1]。そこで、岸は正規化の手法を変更して、超行列の各列の最大要素を1にする基準化を行う修正ANP法[1][2]を提案し、修正された超行列の主固有ベクトルを解と定義した。そして、修正ANP法によって合理的な解を得ている。

ANP法における解は、結果的には超行列の主固有ベクトルとなっているが、サーティは超行列の主固有ベクトルをANP法の解と定義したわけではない。従って、修正ANP法[2]で提案した解の定義は、サーティが定義した内容とは異なっている。そこで、この報告では、サーティの本来の定義に従う修正ANP法の解の定義を提案する。

2. ANP法における解の定義[3]

超行列を $\bar{S} = [\bar{s}_{ij}] (i, j = 1, \dots, n)$ とする。 \bar{s}_{ij} は第 i 要素の第 j 要素への直接的な影響を表す。しかし、第3の要素を経由した影響も考慮する必要があるので、

$$\bar{s}_{ik} \bar{s}_{kj} \text{ for all } k = 1, \dots, n$$

を加える必要がある。これは、 \bar{S}^2_{ij} である。同様に、第3、第4の要素を経由した影響も考慮するので、

$$\bar{s}_{ik} \bar{s}_{kl} \bar{s}_{lj} \text{ for all } k, l = 1, \dots, n$$

を加える必要があり、これは、 \bar{S}^3_{ij} である。

他のあらゆる要素を経由した影響を考慮すると

$$\bar{S}^{(k)} = \frac{1}{k} (\bar{S} + \bar{S}^2 + \dots + \bar{S}^k)$$

$$C(\bar{S}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{S}^{(k)}$$

とおくと、 $C(\bar{S})$ が総合的な影響である。これがANP法の解である。特に、 \bar{S} が既約行列であるならば、 \bar{S} の左主固有ベクトルを $e = [1, \dots, 1]$ 、 \bar{S} の右主固有ベクトル z を $ez = 1$ となるようにとると、

$$C(\bar{S}) = ze$$

なので、 z を \bar{S} の総合影響値 (総合評価値) と定義する。

なお、 $C(\bar{S})$ を \bar{S} の Cesaro 和と言う。

\bar{S} がAHPにおける階層構造から得られた超行列であるとき、階層数を m とすると、

$$\bar{S}^k = \bar{S}^{m-1} \quad k \geq m-1, \quad C(\bar{S}) = \bar{S}^{m-1}$$

である。

例えば、総合目標、評価基準、代替案の3構造の場合、 \bar{S} 、 \bar{S}^2 は次のようになるので、 \bar{S}^2 の総合目標の列、

代替案の行における $\bar{W}\bar{v}$ が総合評価値となる。

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bar{v} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{W} & I \end{bmatrix} \quad \bar{S}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{W}\bar{v} & \bar{W} & I \end{bmatrix}$$

3. 修正ANP法における解の定義

3. 1 修正ANP法の超行列

ANP法の超行列 $\bar{S} = [\bar{s}_{ij}] (i, j = 1, \dots, n)$ を、次のように修正して、各列の最大要素が1となるような修正ANP法の超行列を作る。

- 各列の最大要素を求める。

$$m_j = \max_{1 \leq i \leq n} \bar{s}_{ij} \quad \text{for all } j = 1, \dots, n$$

- 各列の要素を列の最大要素で割る。

$$s_{ij} = \bar{s}_{ij} / m_j \quad \text{for all } i, j = 1, \dots, n$$

- これを修正ANP法の超行列とする。

$$S = [s_{ij}] (i, j = 1, \dots, n)$$

3. 2 超行列 S の主固有値 λ_{\max} による調整

超行列 S の主固有値 λ_{\max} は通常1を越えるため、ANP法のように Cesaro 和が求まらない。しかし、超行列 S はある要素の別の要素への直接的な影響を表しているので、直接的な、および、間接的な影響度の比率が求まれば、その比率を修正ANP法の解と考えることができる。そこで、

$$T = S / \lambda_{\max}$$

とおくと、 T は次の性質を満たす。

$$(1) \quad t_{ij} \geq 0 \quad \text{for all } i, j = 1, \dots, n$$

$$(2) \quad T \text{ の主固有値は } 1 \text{ である}$$

$$(3) \quad |\alpha| \leq 1 \quad \text{for all eigenvalue } \alpha \text{ of } T$$

3. 3 定理1

S を修正ANP法の超行列、 λ_{\max} を S の主固有値とする。 S が既約行列ならば、 $T = S / \lambda_{\max}$ とおくと、

$$(1) \quad \text{Cesaro 和 } C(T) \text{ は存在して、階数 } 1 \text{ である。}$$

$$(2) \quad C(T) = zw$$

ここで、列ベクトル z は S の右主固有ベクトル、行ベクトル w は S の左主固有ベクトルで、 $wz = 1$ を満たすものである。

3. 4 修正ANP法の解

$T = S / \lambda_{\max}$ に対する Cesaro 和 $C(T)$ を、修正ANP法の解とする。また、 z を超行列 S の総合評価値と定

義する。

3. 5 階層構造AHPの場合

S がAHPにおける階層構造から得られた超行列であるとき、 $\lambda_{\max} = 1, T = S$ なので、階層数を m とすると、

$$S^k = S^{m-1} \quad k \geq m-1, \quad C(S) = S^{m-1}$$

である。

例えば、総合目標、評価基準、代替案の3構造の場合、 S, S^2 は次のようになるので、 S^2 の総合目標の列、代替案の行における Wv が総合評価値となる。

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ v & 0 & 0 \\ 0 & W & I \end{bmatrix} \quad S^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ Wv & W & I \end{bmatrix}$$

4. 定理1の証明

フロベニウスの第2定理を出発点として、2つの補題の後、定理1を証明する。

定理2 (フロベニウスの第2定理)

A を非負の既約行列として、 λ を A の主固有値、 c を A の周期とする。このとき、ちょうど c 個の A の固有値 $\alpha_1, \dots, \alpha_c$ $|\alpha_i| = \lambda$ ($i=1, \dots, c$) が存在する。そして、これらはすべて異なっていて、次のように与えられる。

$$\alpha_1 = \lambda, \alpha_2 = \lambda\varepsilon, \alpha_3 = \lambda\varepsilon^2, \dots, \alpha_c = \lambda\varepsilon^{c-1}$$

$$\varepsilon = e^{2\pi i/c}$$

補題1

α を複素数とする。 $|\alpha| = 1$ ならば次が成立する。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (\alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^k) = \begin{cases} 1 & \text{for } \alpha = 1 \\ 0 & \text{for } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

補題2

J を次のようなジョルダン細胞形とする。

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \alpha & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha \end{bmatrix}$$

このとき、 $|\alpha| < 1$ ならば次が成立する。

$$C(J) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (J + J^2 + \dots + J^k) = 0$$

定理1の証明

(1) S が既約行列なので T も既約行列である。従って、定理2より、 T の周期を c とすると、 T の c 個の固有値が存在して、

$$\alpha_1, \dots, \alpha_c \quad |\alpha_i| = 1 \quad (i=1, \dots, c)$$

これらはすべて異なっていて、次のように与えられる。

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \varepsilon, \alpha_3 = \varepsilon^2, \dots, \alpha_c = \varepsilon^{c-1}$$

$$\varepsilon = e^{2\pi i/c}$$

従って、ある正則行列 P をとると、次のようなジョルダン標準形をえる。

$$J = PTP^{-1} = \begin{bmatrix} J_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 \\ & & J_c & & & \\ & & & J_{c+1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & J_s \end{bmatrix}$$

ここで、

$$J_i = [\alpha_i] \quad (1 \leq i \leq c)$$

$$J_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & 1 & & 0 \\ & \alpha_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha_i \end{bmatrix} \quad \begin{cases} |\alpha_i| < 1 \\ (c+1 \leq i \leq s) \end{cases}$$

である。

$$\text{補題1より、} C(J_i) = 0 \quad \text{for } J_i (2 \leq i \leq c)$$

$$\text{補題2より、} C(J_i) = 0 \quad \text{for } J_i (c+1 \leq i \leq s)$$

$$\text{従って、} C(J) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{をえる。}$$

$T^k = P^{-1} J^k P$ なので

$$C(T) = \lim_{k \rightarrow \infty} T^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} P^{-1} J^{(k)} P = P^{-1} C(J) P$$

従って、 $C(T)$ が存在して、階数は1となる。

(2) x を P^{-1} の第1列、 y を P の第1行とすると、 $PP^{-1} = I$ より $yx = 1$ 。そして、

$$C(T) = xy$$

となる。

$$x(yz) = C(T)z = z, \quad (wx)y = wC(T) = w$$

$yx = 1$ と $zw = 1$ より、 $(yz)(wx) = 1$ をえる。

従って、

$$zw = x(yz)(wx)y = xy = C(T)$$

をえる。

参考文献

- [1] 岸 善徳: ANPにおける異常現象を解決する修正ANP法の提案 OR学会2004年春季全国大会
- [2] 岸 善徳: 修正ANP法による先生と学生の相互評価問題の解法 OR学会2004年秋季全国大会
- [3] T. L. Saaty: The Analytic Network Process. (RWS Publication, Pittsburgh, 1996)