日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

第２最大値を考慮した相対効率モデル

01205220　日本大学生産工学部　†　篠原　正明
日本大学生産工学部　　南柿　正博

1　はじめに

DEA の入力指向 CCR モデルは，分母に全 DMU の中での絶対効率値の「最大値」を基準値として注目 DMU の絶対効率値の相対値を比率尺度で表す相対効率モデルとして解釈できる。本論文では，基準となる分母として，「最大値」のかわりに「第２最大値」ならびに「最大値と第２最大値の平均」を考慮した場合の相対効率モデルについて考察し，各 DMU 対の平均 DMU 集合を対象とした CCR モデルとの関係について考察する。

2　DEA の CCR モデルと相対効率モデル

DEA の入力指向 CCR モデル CCRI は，次の相対効率モデルと等価である［１］。

[CCRI の相対効率モデル]
目的関数は（１），制約条件は（２）となる。

$$r_o = \frac{\dfrac{\mathbb{u}^T \mathbb{y}_o}{\mathbb{v}^T \mathbb{x}_o}}{\max\limits_j \left\{ \dfrac{\mathbb{u}^T \mathbb{y}_j}{\mathbb{v}^T \mathbb{x}_j} \right\}} \rightarrow \text{最大化} \quad (1)$$

$$\mathbb{u} \geq \mathbb{0}, \quad \mathbb{v} \geq \mathbb{0} \quad (2)$$

但し，
r_o : DMU$_o$ の効率値
$\mathbb{u}$: 出力項目の評価ベクトル
$\mathbb{v}$: 入力項目の評価ベクトル
$\mathbb{x}_j$: DMU$_j$ の入力項目ベクトル
$\mathbb{y}_j$: DMU$_j$ の出力項目ベクトル

3　第２最大値を考慮した相対効率モデルの提案

（１）式の相対効率モデルの目的関数 r_o の分母として，「第２最大値」ならびに「最大値と第２最大値の平均（第１・２最大値平均）」を基準とする場合について以下に考察する。

（３－１）　第２最大値 *2nd*max 基準とする相対効率モデル

相対効率モデル定式化の目的関数のみを（３）に示す（制約条件は（２）と同じ)。

$$r_o = \frac{\dfrac{\mathbb{u}^T \mathbb{y}_o}{\mathbb{v}^T \mathbb{x}_o}}{2nd \max\limits_j \left\{ \dfrac{\mathbb{u}^T \mathbb{y}_j}{\mathbb{v}^T \mathbb{x}_j} \right\}} \rightarrow \text{最大化} \quad (3)$$

（３－２）　最大値と第２最大値の平均を基準とする相対効率モデル

相対効率モデル定式化の目的関数のみを（４）に示す（制約条件は（２）と同じ)。

$$r_o = \frac{\dfrac{\mathbb{u}^T \mathbb{y}_o}{\mathbb{v}^T \mathbb{x}_o}}{\left[\max\limits_j \left\{ \dfrac{\mathbb{u}^T \mathbb{y}_j}{\mathbb{v}^T \mathbb{x}_j} \right\} + 2nd \max\limits_j \left\{ \dfrac{\mathbb{u}^T \mathbb{y}_j}{\mathbb{v}^T \mathbb{x}_j} \right\} \right]} \quad (4)$$

（３－３）　DMU対 (i, j) の平均 DMU を対象とした CCR モデルの相対効率モデル

$i \neq j$ の DMU 対 (i, j) の平均 DMU の入力項目ベクトルは $(\mathbb{x}_i + \mathbb{x}_j)/2$，出力項目ベクトルは $(\mathbb{y}_i + \mathbb{y}_j)/2$ なので，これらの平均DMU群を対象とした CCR モデルの相対効率モデル定式化の目的関数は次式（５）で与えられる（制約条件は（２）と同じ)。

$$r_o = \frac{\dfrac{\mathbb{u}^T \mathbb{y}_o}{\mathbb{v}^T \mathbb{x}_o}}{\max\limits_{i \neq j} \left\{ \dfrac{\mathbb{u}^T (\mathbb{y}_i + \mathbb{y}_j)}{\mathbb{v}^T (\mathbb{x}_i + \mathbb{x}_j)} \right\}} \rightarrow \text{最大化} \quad (5)$$

4　離散化評価ベクトル列挙にもとづく数値実験

表1に示す1入力2出力9DMU データの場合について，評価ベクトルの各要素（u_1 と u_2）を1きざみで0～100（101）通り列挙し，101×101通りの組合せについて，**u** と **v** を振らして，近似的に相対効率値を評価した（但し，v＝1）。通常の CCRI モデル（(1) 式)，第2最大値相対効率モデル（(3) 式)，第1・2最大値平均相対効率モデル（(4) 式)，平均 DMU 群を対象とする CCRI モデル（(5) 式）の4つの相対効率モデルを実験対象とし，その結果を表2に示す。

表1．1入力2出力9DMU データ

DMU	A	B	C	D	E	F	G	H	I
入力1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
出力1	1	2	3	4	4	5	6	1	0.5
出力2	5	7	4	3	6	5	2	7	5

表2．効率値データ

DMU	CCRI (1)式	第1･2最大値平均(4)式		第2最大値(3)式		平均DMU群(5)式
		＝許容	≠	＝許容	≠	
A	0.714286	0.714286	0.769231	0.727273	0.833333	0.714286
B	1	1.022222	1.076923	1.045455	1.166667	1.022222
C	0.7	0.705882	0.736842	0.72	0.777778	0.705882
D	0.75	0.758621	0.789474	0.8	0.833333	0.758621
E	1	1.019608	1.052632	1.04	1.111111	1.019608
F	1	1.034483	1.052632	1.071429	1.111111	1.034483
G	1	1.090909	1.090909	1.2	1.2	1.090909
H	1	1	1.076923	1	1.166667	1
I	0.714286	0.714286	0.769231	0.714286	0.833333	0.714286

5　考察

（5－1）　離散化を細かくするほど（$D_1 \subset D_2$）効率値は向上する［2］。

（5－2）　通常の CCRI モデルならびに平均 DMU 群に対する CCRI モデルに対して，LP 解法を適用した結果（連続版）とは，（5－1）での近似誤差の範囲で，一致する。

（5－3）　効率値の計算結果について、以下の大小関係が本数値実験では成立する。

「通常の CCRI」≦「第1・2最大値平均（第2最大値＝最大値を許容)」≦「第1・2最大値平均（第2最大値＝最大値を不許容)」≦「第2最大値（第2最大値＝最大値を不許容)」

この大小関係は定義式からして，一般に成立することが予想できる（図1)。

（5－4）　平均 DMU 群 CCRI の効率値が第1・2最大値平均（第2最大値＝最大値を許容）の効率値に一致する結果が得られたが，この性質は1入力多出力の場合については両者の包絡面が一致するため（図1)，一般に成立する。 しかし，多入力多出力の場合については，両者の値は類似するものの，本性質は一般には成立しない。

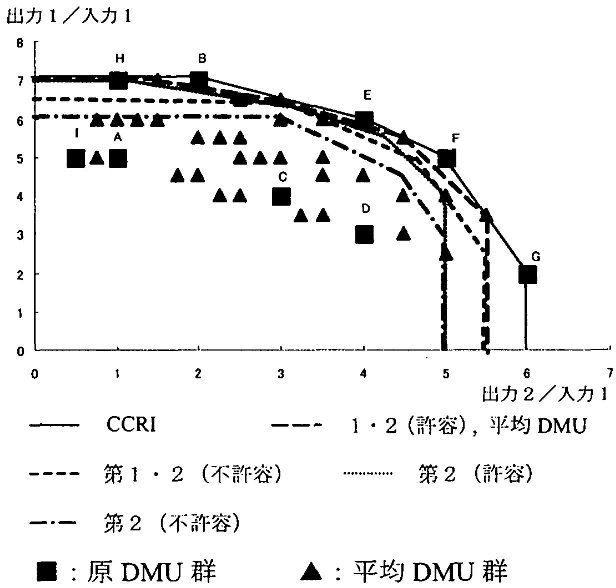

図1．原 DMU，平均 DMU と各種包絡面

6　おわりに

各種相対効率モデル間の関連性（5－3)，分数形式表現の相対効率モデルと LP ベースの DEA モデルの関連性（5－4）について考察した。

CCR モデル以外，例えば BCC モデル対応の相対効率モデル［3］が今後の課題である。

参考文献

［1］円谷他：OR 誌 44, pp.425 - 434.（1999）
［2］岩楯　健寛：日本大学大学院修士論文（2004.3）
［3］篠原，大澤，鈴木：日本大学学術講演会論文，pp.121 - 122（2002.12）