日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

2次錘制約付き非線形最適化問題の解法

01701240 （株）数理システム ＊山下 浩 YAMASHITA Hiroshi
01702330 東京理科大学 矢部 博 YABE Hiroshi

1. はじめに

本発表では，2次錘制約付きの非線形最適化問題に対する主双対内点法による解法を述べる．この問題に対するアルゴリズムは幾つか発表されているが，我々の知る限り部分問題（通常のSOCP）を内点法によって扱い，外部反復はSQP/SLPのようなフレームワークに依存したもののみである．本方法は非線形最適化問題を主双対空間における内点法の反復によって直接求解する点が特徴であり，主双対空間におけるメリット関数の構築がアルゴリズムの鍵となっている．

対象とする問題は以下のようなものである．2次錘を

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^1 \times \cdots \times \mathcal{K}^s$$

$$\mathcal{K}^i = \left\{ x^i = (x_0^i, \overline{x}^i)^t \in \mathbb{R}^{n_i} \,\middle|\, x_0^i \geq \|\overline{x}^i\| \right\}$$

と表すと，制約条件 $x = (x^1, \cdots, x^s)^t \in \mathcal{K}$ $(\Leftrightarrow x \succeq 0)$ は $x^i \in \mathcal{K}^i$ $(\Leftrightarrow x^i \succeq 0), i = 1, \cdots, s$ を意味する．そして解くべき問題を

$$(1) \qquad \begin{array}{lll} 最小化 & f(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ 条\ \ 件 & g(x) = 0, & x \succeq 0 \end{array}$$

と定義する．$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ である．ラグランジュ関数と，その x に関する微分は

$$\begin{aligned} L(w) &= f(x) - y^t g(x) - z^t x \\ \nabla_x L(w) &= \nabla f(x) - A(x)^t y - z \end{aligned}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned} w &= (x, y, z)^t \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \\ A(x) &= (\nabla g_1(x), \cdots, \nabla g_m(x))^t \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{aligned}$$

で，$y \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^n$ はそれぞれ等式制約と2次錘制約に対する双対変数である．KKT条件は

$$r_0(w) \equiv \begin{pmatrix} \nabla_x L(w) \\ g(x) \\ x \circ z \end{pmatrix} = 0,\ x \succeq 0,\ z \succeq 0$$

と書ける．ここで，$x \circ z = (x^1 \circ z^1, \cdots, x^s \circ z^s)^t$ は x^i と z^i の Jordan 積をブロック成分とするベクトルを表す．

バリヤKKT条件 $r(w, \mu) = 0$ は，上記 $x \circ z = 0$ を $x \circ z - \mu e = 0, \mu > 0, e = (e^1, \cdots, e^s)^t$ （e^i は Jordan 積の単位元）と修正したものである．ここで

$$\widetilde{x} = T_p x,\ \widetilde{z} = T_p^{-1} z,\ T_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

によって，バリヤKKT条件を

$$\widetilde{r}(w, \mu) \equiv \begin{pmatrix} \nabla_x L(w) \\ g(x) \\ \widetilde{x} \circ \widetilde{z} - \mu e \end{pmatrix} = 0,\ x \succ 0,\ z \succ 0$$

と変換する．T_p は $T_{p^i} = 2Arw^2(p^i) - Arw((p^i)^2), p \in \mathrm{int}\mathcal{K}$ の直和で，$Arw(p^i) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ は

$$Arw(p^i) = \begin{pmatrix} p_0^i & (\overline{p}^i)^t \\ \overline{p}^i & p_0^i I \end{pmatrix}$$

と定義される．行列 T_p は $Arw(\widetilde{x})$ と $Arw(\widetilde{z})$ が可換になるように選ばれる．

2. アルゴリズム

2.1. 外部反復

通常の内点法と同様に，パラメータ μ を減少させながらバリヤKKT条件 $r(w, \mu) = 0$ を近似的にみたす内点を逐次求めることによって最終的にKKT点を得ることを目的とする外部反復を行う．

[KKT 点を求めるための反復]

ステップ0． $\varepsilon > 0, M_c > 0, k = 0$ とする．$\mu_k \searrow 0$ となる正数列 $\{\mu_k\}$ を与える．

ステップ1． $\|r(w_{k+1}, \mu_k)\| \leq M_c \mu_k$ をみたす内点 w_{k+1} を求める．

ステップ2． $\|r_0(w_{k+1})\| \leq \varepsilon$ ならばストップ．

ステップ3． $k \leftarrow k + 1$ とおいてステップ1に行く．□

定理 上記アルゴリズムによって生成された点列を $\{w_k\}$ として，点列 $\{x_k\}$ と $\{y_k\}$ が有界なとき，点列 $\{z_k\}$ も有界で，$\{w_k\}$ の任意の集積点はKKT条件をみたす．□

2.2. 内部反復

$\widetilde{r}(w, \mu) = 0$ に対するニュートン法は

$$(2) \qquad J(w)\Delta w = -\widetilde{r}(w, \mu)$$

$$J(w) = \begin{pmatrix} G & -A(x)^t & -I \\ A(x) & 0 & 0 \\ Arw(\widetilde{z})T_p & 0 & Arw(\widetilde{x})T_p^{-1} \end{pmatrix}$$

ここで，$G=\nabla_x^2 L(w)$，あるいはヘッセ行列に対する近似行列である．

主双対空間において大域的収束性をもつ内点法を構築するために，主双対空間でのメリット関数を定義する．本稿で提案するメリット関数は，[1] で提案された通常の非線形最適化問題に対する主双対メリット関数を修正したものである．BPP 関数（=barrier-penalty-potential 関数）を

$$F(w)=F_{BP}(w)+\nu F_P(w),\ \nu>0$$

と定義する．

$$\begin{aligned} F_{BP}(w) &= f(x)-\frac{\mu}{2}\sum_{i=1}^{s}\log(\det(x^i))+\rho\,\|g(x)\|_1 \\ &\quad +\rho'\sum_{i=1}^{s}\left|(x^i)^t z^i-\mu\right|,\ \rho>0,\rho'>0 \\ F_P(w) &= \log(x^t z)-\frac{1}{2s}\sum_{i=1}^{s}\log(\det(x^i)\det(z^i)) \end{aligned}$$

ここで，$\det(x^i)\equiv(x_0^i)^2-\|\bar{x}^i\|^2$ である．上記のメリット関数は記号の便宜のために w の関数として記されているが，実は x,z のみの関数であることに注意．

BPP 関数の変数の変化分 Δw に対する 1 次近似は

$$\begin{aligned} &F_l(w,\Delta w)=F(w)+\Delta F_l(w,\Delta w) \\ &\Delta F_l(w,\Delta w)=\Delta F_{BPl}(w,\Delta w)+\nu\Delta F_{Pl}(w,\Delta w) \\ &\Delta F_{BPl}(w,\Delta w)=\nabla f(x)^t\Delta x-\mu(x^{-1})^t\Delta x \\ &\quad+\rho(\|g(x)+A(x)\Delta x\|_1-\|g(x)\|_1) \\ &\quad+\rho'\textstyle\sum_{i=1}^{s}(\left|(x^i)^t\Delta z^i+(\Delta x^i)^t z^i+(x^i)^t z^i-\mu\right| \\ &\quad-\left|(x^i)^t z^i-\mu\right|) \\ &\Delta F_{Pl}(w,\Delta w)=\tfrac{1}{x^t z}(x^t\Delta z+\Delta x^t z) \\ &\quad-\tfrac{1}{s}\left((x^{-1})^t\Delta x+(z^{-1})^t\Delta z\right) \end{aligned}$$

ここで，$x^{-1}=((x^1)^{-1},\ldots,(x^s)^{-1})^t$ で，$(x^i)^{-1}$ は x^i の逆元．z^{-1} も同様．

以下の補題によって，$G+T_pArw(\tilde{x})^{-1}Arw(\tilde{z})T_p$ が正定値で，$\rho\ge\|y+\Delta y\|_\infty$ ならばニュートン法の方向が BPP 関数の降下方向になることが分る．

補題　Δw がニュートン方程式 (2) の解ならば

(i) $\Delta F_{BPl}(w,\Delta w)$
$\le-\Delta x^t\left(G+T_pArw(\tilde{x})^{-1}Arw(\tilde{z})T_p\right)\Delta x$
$-(\rho-\|y+\Delta y\|_\infty)\,\|g(x)\|_1-\rho'\sum_{i=1}^{s}\left|(x^i)^t z^i-\mu\right|$

(ii) $\Delta F_{Pl}(w,\Delta w)\le 0$ □

以下の直線探索アルゴリズムは [1] で提案されたものを 2 次錘制約に適合するように修正したものである．

[バリヤ KKT 点を求めるための直線探索アルゴリズム]

ステップ 0．$\varepsilon>0,\mu>0,\gamma\in(0,1),\beta\in(0,1),\varepsilon_0\in(0,1),k=0$ とおく．

ステップ 1．$\|r(w_k,\mu)\|\le\varepsilon$ ならばストップ．

ステップ 2．ニュートン方程式 (2) によって探索方向 Δw_k を計算する．

ステップ 3．ステップサイズの計算

・$\alpha_{x\max}=\min_i\left\{\arg_{\alpha^i}\left\{\begin{array}{c}\det(x_k^i+\alpha^i\Delta x_k^i)=0,\\ (x_k^i)_0+\alpha^i(\Delta x_k^i)_0\ge 0,\alpha^i>0\end{array}\right\}\right\}$

・$\alpha_{z\max}=\min_i\left\{\arg_{\alpha^i}\left\{\begin{array}{c}\det(z_k^i+\alpha^i\Delta z_k^i)=0,\\ (z_k^i)_0+\alpha^i(\Delta z_k^i)_0\ge 0,\alpha^i>0\end{array}\right\}\right\}$

・$\bar{\alpha}=\min\{\gamma\alpha_{x\max},\gamma\alpha_{z\max},1\}$

・Armijo ルール

$$F(w_k+\bar{\alpha}\beta^\ell\Delta w_k)\le F(w_k)+\varepsilon_0\bar{\alpha}\beta^\ell\Delta F_l(w_k,\Delta w_k)$$

をみたす最小の非負整数 ℓ を求める．

・$\alpha_k=\bar{\alpha}\beta^\ell$ とおく．

ステップ 4．$x_{k+1}=x_k+\alpha_k\Delta x_k,z_{k+1}=z_k+\alpha_k\Delta z_k,y_{k+1}=y_k+\Delta y_k,k\leftarrow k+1$ とおいて，ステップ 1 に戻る．□

2.3.　内部反復の大域的収束

以下のような仮定のもとで，本稿で提案された直線探索アルゴリズムの大域的収束性を示すことができる．

仮定

(i) 関数 f,g は 2 回連続微分可能．

(ii) 点列 $\{w_k\}$ はコンパクト集合に含まれる．

(iii) 上記コンパクト集合上で $A(x)$ はフルランク．

(iv) 行列 $G_k+T_{p_k}Arw(\tilde{x}_k)^{-1}Arw(\tilde{z}_k)T_{p_k}$ は一様に正定値で一様に有界．

(v) $\rho\ge\|y_k+\Delta y_k\|_\infty,k=0,1,\ldots$ □

定理　上記仮定のもとで，直線探索アルゴリズムによって生成された点列 $\{w_k\}$ の任意の集積点はバリヤ KKT 条件をみたす．□

4.　まとめと今後の発展

2 次錘制約付きの非線形最適化問題について，大域的収束性をもつ主双対内点法のアルゴリズムを提案した．本発表のアルゴリズムはいわゆる直線探索法を利用したものであり，大規模問題に対しては信頼領域法を利用したアルゴリズムを構築する必要がある．また，ここで提案された主双対メリット関数は通常の非線形最適化問題のアルゴリズムにとっても実用上有益であると期待できる．この方向への発展も今後の課題である．

参考文献

[1] H. Yamashita and H. Yabe, *An interior point method with a primal-dual quadratic barrier penalty function for nonlinear optimization*, SIAM J. Optim., 14 (2003), pp. 479-499.