

## 容量制約をもつ多品種フローネットワーク設計問題に対する容量スケーリング法

申請中 東京海洋大学  
01107460 流通経済大学  
01108010 東京海洋大学

\*陳 明哲 CHEN Mingzhe  
片山直登 KATAYAMA Naoto  
久保幹雄 KUBO Mikio

## 1. はじめ

容量制約をもつ多品種フローネットワーク設計問題 (Multicommodity Capacitated Network Design Problem: MCND) は多品種の需要が容量をもつネットワーク上を流れるとき、フロー費用とデザイン費用を最小化するネットワークの形状とフロー経路を同時に決定する問題であり、通信ネットワーク設計、交通ネットワーク設計や輸送・配送ネットワーク設計などに様々な応用分野が存在している。

本研究では、容量制約をもつ多品種フローネットワーク設計問題に対する列生成法を用いたパス型の弱い定式化と強い定式化を示し、これらに対する容量スケーリング法を提案する。

## 2. 問題の定式化

ノード集合を  $N$ 、アークの集合を  $A$ 、品種の集合を  $K$ 、各品種  $k \in K$  ごとの出発ノードから到着ノードへのパスの集合を  $P^k$  とする。アーク  $(i, j) \in A$  上を品種  $k$  が 1 単位流れるときに発生する費用を  $c_{ij}^k$  とし、アーク  $(i, j)$  の容量を  $C_{ij}$ 、アーク設置費用を  $f_{ij}$  とする。品種  $k$  の需要を  $d^k$ 、パス  $p$  がアーク  $(i, j)$  を含むとき 1、それ以外するとき 0 を表す定数を  $\delta_{ijp}$  とする。品種  $k$  がパス  $p \in P^k$  上を通過する量を表す非負の実数のフロー変数を  $x_p^k$ 、アーク  $(i, j)$  を設置するとき 1、それ以外するとき 0 であるデザイン変数を  $y_{ij}$  とする。

取りうるパス数が少ない場合には、比較的容易に最適解を求めることができるが、パス数は非常に多くなる危険性がある。そこで、本研究ではパスを必要に応じて生成する列生成法を利用する。パスの集合  $P^k$  の部分集合  $P^k$  をとし、 $P^k$  を対象とした制限付きの問題を  $MCND(P^k)$  とする。

( $MCND(P^k)$ )

$$\min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} c_{ij}^k \sum_{p \in P^k} \delta_{ijp} x_p^k + \sum_{(i,j) \in A} f_{ij} y_{ij} \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k \in K} \sum_{p \in P^k} \delta_{ijp} x_p^k \leq C_{ij} y_{ij} \quad (i, j) \in A \quad (2)$$

$$\sum_{p \in P^k} \delta_{ijp} x_p^k \leq d^k y_{ij} \quad (i, j) \in A \quad k \in K \quad (3)$$

$$\sum_{p \in P^k} x_p^k = d^k \quad k \in K \quad (4)$$

$$x_p^k \geq 0 \quad k \in K \quad p \in P^k \quad (5)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i, j) \in A \quad (6)$$

(1)式は、フロー費用、アーク設置費用の和を最小化する目的関数である。(2)式は、アーク  $(i, j)$  が存在するとき、アーク上を流れる各品種のパスフロー量の合計がアークの容量以下であることを表す。(3)式は、アーク上を流れる品種  $k$  のパスフロー量がその品種の需要以下であることを表す。(4)式は、品種  $k$  のパスフロー量の合計が需要量と一致することを表す。(5)式は、パスフローは非負の実数であることを表す。(6)式は、変数  $y_{ij}$  の 0-1 条件を表す。

この定式化は強い定式化である。一方、弱い定式化は(3)式を取り除いた定式化である。弱い定式化は比較的容易に解くことができるが、下界値などの精度が悪いことが知られている。

## 3. 列生成法

$MCND(P^k)$  の線形緩和問題を  $MCNDR(P^k)$  とする。 $MCNDR(P^k)$  を汎用の数値最適化ソフトウェアを用いて解く。(2), (3), (4)式に対する双対変数を  $\pi_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}^k$ ,  $\beta^k$  とする。ここで、 $\pi_{ij}$  と  $\sigma_{ij}^k$  は非負の実数であり、 $\beta^k$  は任意の実数である。このとき、 $MCNDR(P^k)$  のフロー変数  $x_p^k$  に対する被覆費用  $h_p^k$  は(7)式となる。

$$h_p^k = \sum_{(i,j) \in A} (c_{ij}^k + \pi_{ij} + \sigma_{ij}^k) \delta_{ijp} - \beta^k \quad (7)$$

価格付け問題を用いて、すべての端点フローにおいて被覆費用が 0 以上か否かを判断する。ここで、価格付け問題はアークの長さを  $(c_{ij}^k + \pi_{ij} + \sigma_{ij}^k)$  とし、品種  $k$  の出発ノードから到

着ノードまでの最短路を求める問題になる。すべての品種に対してこの問題の最適値が  $\beta^k$  以上なら終了する。また、 $\beta^k$  未満であれば最短パスを  $P^k$  に追加して再び  $MCNDR(P')$  を解く。この操作を繰り返すことによって、 $MCNDR(P)$  の最適解を求めることができる。

列生成法の流れを示す。

- 1) 適当なパス集合を求め、 $P^k$  とする。
- 2)  $MCNDR(P')$  を解き、双対変数  $\pi_{ij}^k, \sigma_{ij}^k, \beta^k$  を求める。
- 3) すべての品種に対して以下の操作を繰り返す。
  - a) アーク費用を  $(c_{ij}^k + \pi_{ij}^k + \sigma_{ij}^k)$  とした品種  $k$  ごとの最短路問題を解き、被覆費用  $h_p^k$  を求める。
  - b)  $h_p^k \geq 0$  であれば、そのパスを  $P^k$  に追加する。
- 4) パスを追加すれば 2) へ戻り、追加しなければ終了する。

#### 4. 容量スケールリング法

容量スケールリング法は線形緩和問題の解をもとにアーク容量を変化させ、デザイン変数  $y$  が 0 か 1 に収束するまで繰り返し、収束解をもとにデザイン変数  $y$  を固定した  $MCND$  に対する多品種フロー問題を解くことによって、 $MCND$  の近似解を算出する方法である。

列生成法を用いた容量スケールリング法の流れを示す。ここでアーク容量を  $C$  とした問題を  $MCNDR(C)$  とおく。

- 1) 平滑化パラメータ  $\lambda \in (0, 1]$  を決め、変化させる容量  $C'$  を  $C$  に設定する。
- 2) 以下の操作を  $MCNDR(C')$  の解  $y$  が 0 または 1 に収束するまで繰り返す。
  - a) デザイン変数  $y$  の範囲を  $[0, C/C']$  に緩和する。
  - b) 列生成法を用いて  $MCNDR(C')$  の解  $x, y$  を求める。
  - c)  $C'$  を  $\lambda C'y + (1-\lambda) C$  に更新する。
- 3) 収束解  $y$  を用いて  $MCND$  の近似解を求める。

#### 5. 数値実験

提案した解法の有効性を検討するために、強い定式化と弱い定式化を用いた方法に対して数値実験を行った。

実験条件は次の通りである。

- 1) 使用データ: OR-Library 内の Multicommodity

表1 計算結果

問題名	ノード	アーク	品種	弱い式化		強い定式化	
				誤差	時間	誤差	時間
p33	20	230	40	0.3%	0:00:02	0.0%	0:00:03
p34	20	230	40	3.3%	0:00:03	0.0%	0:00:04
p37	20	229	200	9.1%	0:00:08	4.8%	1:27:42
p38	20	229	200	7.6%	0:00:07	3.4%	8:36:00
p39	20	229	200	10.5%	0:00:07	2.6%	1:27:03
p40	20	229	200	10.8%	0:00:11	5.1%	14:42:02
p41	20	289	40	0.8%	0:00:04	0.3%	0:00:05
p42	20	289	40	2.4%	0:00:04	0.1%	0:00:08
p45	20	287	200	11.4%	0:00:08	3.9%	1:48:42
p46	20	287	200	8.3%	0:00:12	6.0%	11:54:52
p49	30	517	100	3.6%	0:00:09	1.1%	0:01:40
p50	30	517	100	18.4%	0:00:14	6.9%	51:24:35

Network Design Problems にある Mulgen1 の問題 p33 から p50

- 2) 誤差: CPLEX による下界値 (最大計算時間 10 時間) に対する誤差
  - 3) 数値ソフトウェア: GLPK-4.1,  $MCNDR(P')$  に適用
  - 4) 言語: C 言語
  - 5) 使用コンピュータ: IBM 互換機, CPU ペンティアム 4 2.8GHz, メモリ 750Mb
- 表 1 に計算結果を示す。

#### 6. まとめ

本研究では、容量制約をもつ多品種フローネットワーク設計問題に対して、列生成法による強い定式化と弱い定式化を用いた容量スケールリング法を提案し、数値実験を行い、提案した解法の有効性を示した。

#### 参考文献

- [1] T.G. Crainic, B. Gendron and G. Hernu. A slope scaling/Lagrangean perturbation heuristic with long-term memory for multicommodity capacitated fixed-charge network design. Technical Report CRT-2003-05, Universite de Montreal, 2003.
- [2] 片山直登. 容量スケールリング法を用いた容量制約をもつ多品種フローネットワークデザイン問題の近似解法, 流通経済大学流通情報学部紀要 Vol.9, No.2, 2005. 掲載予定.
- [3] 久保幹雄. MIP ソルバーを利用したメタ解法的设计. Working Paper, 東京海洋大学, 2003.