日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

3つの資源節点集合を持つ4点連結グラフを均等分割する問題について

豊橋技術科学大学工学部情報工学科 ＊岩田 健吾 IWATA Kengo
02004044 豊橋技術科学大学工学部情報工学科 石井 利昌 ISHII Toshimasa

1 はじめに

本研究では，次のように定式化される与えられた資源集合を均等分割するグラフの分割問題を考える．

問題 1 入力: グラフ $G=(V,E)$ と k 個の互いに素な節点部分集合 (資源集合) $T_1, T_2, \ldots, T_d$ ($|T_1|, |T_2|, \ldots, |T_d|$: 偶数)．出力: 次の (*i*)-(*iii*) を満たす G の 2 分割 $\{G_1=(V_1,E_1), G_2=(V_2,E_2)\}$: (*i*) $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, (*ii*) G_1 と G_2 はともに連結, (*iii*) G_1 と G_2 はともに $T_1, T_2, \ldots, T_d$ からそれぞれちょうど半数の節点を含む． □

上の (i)-(iii) を満たす分割を，d-2 分割と呼ぶ．この問題は，公平な土地の分割などに応用できる．これまでに，$d=1$ の場合でも，1-1 分割が存在するかを判定するのは NP-困難であることが知られている [1, 2]．一方で，分割が存在するための十分条件についても研究がなされてきている．$d=1$ の場合，入力グラフが 2 点連結グラフならば，$O(|V|)$ 時間で 1-2 分割が見つかることが知られている [5, 6]．$d=2$ の場合には，G が 3 点連結グラフならば，2-2 分割 $\{G_1, G_2\}$ が存在し，$O(|V|^2 \log |V|)$ 時間で見つかることが，永持ら [4] によって示されている．一般の $d \geq 3$ の場合については，d-2 分割が存在するための自明でない十分条件は知られておらず，[4] で G が $(d+1)$-点連結グラフならば G の d-2 分割が存在すると予想されていた．

本研究では，$d=3$ の場合に分割が存在するための十分条件について考える．まず，入力グラフが 4 点連結であっても，図 1 に示されるように分割が存在しない例が存在する．この例は，[4] で示された予想に対して否定的な答えを与えるものとなっている．その一方で，本研究では入力グラフが 4 点連結でかつ 4 節点の完全グラフを部分グラフとして持つならば，3-2 分割 $\{G_1, G_2\}$ が存在することを示す．そして，このような $\{G_1, G_2\}$ を見つける $O(|V|^3 \log |V|)$ 時間アルゴリズムを提案する．

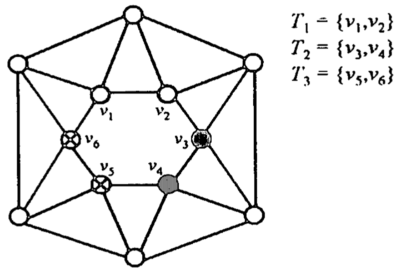

図 1: 4 点連結のグラフで 3-2 分割を持たない例

2 用語と定義

$G=(V,E)$ を，V を節点集合，E を枝集合とする単純無向グラフとする．“ $\subset$ ” は，真に包含することを意味し，“ $\subseteq$ ” は，“ $\subset$ ” または “ $=$ ” であることを意味する．グラフ G の節点集合と枝集合を，それぞれ $V(G)$, $E(G)$ で表わす．節点 u と節点 v を端点とする枝を $e=(u,v)$ と表わす．グラフ G において，$|V| \geq k+1$ であり，どの $(k-1)$ 個の節点集合 $X \subseteq V$ を除去してもグラフが連結ならば，G は k 点連結であるという．G の節点集合 $X \subseteq V$ において，節点 $v \in V-X$ がある節点 $u \in X$ について $(u,v) \in E$ を満たすならば，v を X の隣接点と呼び，X の隣接点の集合を $N_G(X)$ と表わす．枝 e を縮約することによって，G から得られたグラフを G/e と表わす．

2.1 ハムサンドイッチカットとグラフの凸埋め込み

d-次元空間 R^d を考える．$\mathbf{0} \neq a \in R^d$ と実数 $b \in R^1$ が与えられたとき，$H(a,b) = \{x \in R^d | \langle a \cdot x \rangle = b\}$ を超平面と呼ぶ ($\langle a \cdot x \rangle$ は $a \in R^d$ と $x \in R^d$ の内積を表わす)．ここで，$H^+(a,b) = \{x \in R^d | \langle a \cdot x \rangle \geq b\}$ を正の閉半空間と呼び，$H^-(a,b) = \{x \in R^d | \langle a \cdot x \rangle \leq b\}$ を負の閉半空間と呼ぶ．

R^d 内の d 個の点集合を $P_1, \ldots, P_d$ とする．どの P_i についても，$|H^+(a,b) \cap P_i| \geq \lceil \frac{|P_i|}{2} \rceil$, $|H^-(a,b) \cap P_i| \geq \lceil \frac{|P_i|}{2} \rceil$ であるなら，R^d 内の超平面 $H = H(a,b)$ は $P_1, \ldots, P_d$ に関するハムサンドイッチカットと呼ばれる．

定理 2.1 [3] R^d 上において，d 個の点集合 $P_1, \ldots, P_d$ が与えられたとき，$P_1, \ldots, P_d$ に関してハムサンドイッチカットである超平面が存在する． □

R^d 上での点集合 $P = \{x_1, \ldots, x_k\}$ において，$x' = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$, $\sum_{i=1,\ldots,k} \alpha_i = 1$ を満たす点 x' を P の凸結合と呼ぶ．P の凸結合である全ての点の集合を $conv(P)$ で表わす．$P = \{x_1, x_2\}$ なら，$conv(P)$ は線分と呼ばれ，$[x_1, x_2]$ と表示される．部分集合 $S \subseteq R^d$ において，任意の 2 点 $x, x' \in S$ が $[x, x'] \subseteq S$ を満たすならば，S を凸集合と呼ぶ．凸集合 $S \subseteq R^d$ の点 $x \in S$ において，もし $x \in [x', x'']$ となる 2 点 $x', x'' \in S - x$ が存在しないならば，x を頂点と呼ぶ．S の 2 頂点 $x_1, x_2 \in S$ について，$\alpha x' + (1-\alpha) x'' = x \in [x_1, x_2]$, $0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす S の 2 点 $x', x'' \in S$ が必ず線分 $[x_1, x_2]$ に含まれるなら，$[x_1, x_2]$ を S の辺と呼ぶ．有限個の閉半空間の共通部分 S は凸多面体と呼ばれ，さらに S が空でなく有界であるとき，有界凸多面体と呼ばれる．R^d 上で有界凸多面体 S が与えられたとき，V_S を S の頂点集合に対応する節点集合，E_S を $[x, x']$ が S の辺であるような S の頂点対 $x, x' \in S$ に対応する枝集合とする無向グラフを，頂点-辺グラフ $G_S = (V_S, E_S)$ と定義する．凸多面体 S において，$H(a,b) \cap S \neq \emptyset$ かつ，$S \subseteq H^+(a,b)$ または $S \subseteq H^-(a,b)$ である超平面 $H(a,b)$ を，S の支持超平面と呼ぶ．S 内の点 p を含む S の支持超平面がないなら，p は S の狭義内部にあるという．S が，R^d 上において S の狭義内部にある点をもつなら，S は R^d 上で全次元であるという．$conv(P)$ の狭義内部にある点の集合を $int(conv(P))$ と表わす．

グラフ $G=(V,E)$ の R^d 上への埋め込みとは，次の (a)(b) を満たす写像 $f:V\rightarrow R^d$ のことをいう．(a) 各節点 $v\in V$ は，R^d 上の点 $f(v)\in R^d$ によって表現される．(b) 各枝 $e=(u,v)\in E$ は，線分 $[f(u),f(v)]$ ($f(e)$ とも表記される) で表現される．節点集合 $\{v_1,\ldots,v_p\}=Y\subseteq V$ について，点集合 $\{f(v_1),\ldots,f(v_p)\}$ を $f(Y)$ で表わし，$conv(f(Y))$ を $conv_f(Y)$ と表わす．グラフ $G=(V,E)$ の R^d 上への凸埋め込みは，次のように定義される．

定義 2.1 [4] $G=(V,E)$ を孤立点を含まないグラフとし，$G'=(V',E')$ を G の部分グラフとする．G' を境界に持つ G の凸埋め込みは，次の $(i)-(iii)$ を満たす R^d への G の埋め込み f で定義される．(i) 全次元である有界凸多面体 $conv_f(V')$ の頂点-辺グラフは G' と同型である．(ii) 各節点 $v\in V-V'$ について，$f(v)\in int(conv_f(N_G(v)))$ が成り立つ．(iii) R^d 上の点集合 $\{f(u)|u\in V\}$ において，どの $d+1$ 点も同一超平面上にない．

グラフ G の R^d への凸埋め込みは次の性質を持つ．

補題 2.1 [4] $G=(V,E)$ を孤立点を持たないグラフとし，f を R^d への G の凸埋め込みとする．ある超平面 $H=H(a,b)$ とある節点部分集合 $\emptyset\neq V_1\subseteq V$ について，$f(V_1)\subseteq H^+(a,b)$ と $f(V)\cap(H^+(a,b)-H(a,b))\subseteq f(V_1)$ が成立するとする．このとき，V_1 は連結グラフを誘導する． □

3 $d=3$ の場合の分割問題

ここでは，G が 4 点連結でかつ 4 節点の完全グラフ C を部分グラフとして持つとき，3-2 分割が $O(|V|^3\log|V|)$ 時間で求まることを示す．補題 2.1 により，入力グラフ G を R^d 上へ凸埋め込みできれば，その埋め込まれたグラフを任意の超平面 $H=H(a,b)$ により分割することで，それぞれ連結である G の 2 分割が求まる．また，定理 2.1 より R^d 上では $T_1,T_2,\ldots,T_d$ をそれぞれ 2 等分する超平面 (ハムサンドイッチカット) が求まる．以上より，G を R^d 上へ凸埋め込みし，ハムサンドイッチカットにより分割することで，d-2 分割が求まる．以上より，d-2 分割が見つかることを示すには，G の R^d 上への凸埋め込みが見つかることを示せば十分である．

以下で，次の定理に対する構成的な証明を与える．

定理 3.1 G が 4 点連結で 4 節点の完全グラフ C を部分グラフとして持つならば，C を境界に持つ G の R^3 上への凸埋め込みが存在し，$O(|V|^3\log|V|)$ 時間で見つかる． □

G の R^3 上への凸埋め込みを見つけるために，[4] で示された $d=2$ の場合のアルゴリズムを拡張した 2 ステップから成るアルゴリズムを示す．最初に $E-E(C)$ となるような枝を，4 点連結性を保ちながら，C を含む 5 点の完全グラフ G_1 となるまで縮約する．このとき C を境界とする G_1 の凸埋め込みは次のように簡単に求めることができる．$V(C)$ の埋め込み f' は $V(C)$ の各節点を一般的な位置に配置することで得られる．そして境界上にない $\{v\}=V(G_1)-V(C)$ である節点 v を $int(conv_{f'}(V(C)))$ に埋め込む．次に縮約をしたプロセスの逆順に，縮約された枝を戻しながら R^3 上への凸埋め込みを行う．アルゴリズムの概要の詳細を次に示す．

アルゴリズム SC-Embedding3
入力: 4 節点完全グラフ C を持つ 4 点連結グラフ G.
出力: C を境界に持つ G の R^3 上への凸埋め込み f.
ステップ 1: $G':=G$ とする．G' の節点の数が 5 になるまで，次の操作 (*) を繰り返す．
(*) 縮約しても 4 点連結性が保たれる，C に含まれない枝 e を見つけ縮約し，結果のグラフを G' とする．
ステップ 2: ステップ 1 の結果得られるグラフを G' で表わす．C を境界とする G' の R^3 上への凸埋め込みを見つける．次に，ステップ 1 で縮約された枝をステップ 1 で処理した逆順に見ていき，その両端点を R^3 上へ凸埋め込みを行いながら，G に戻していく．ここで，どの 4 点も同じ平面上に配置しない． □

アルゴリズムの正当性は次の 2 つの補題により証明できる．補題の証明及び計算時間の解析は省略する．

補題 3.1 $G=(V,E)$ を 4 節点の完全部分グラフ C を持つ 4 点連結グラフとする．このとき，G/e が 4 点連結であるような $E-E(C)$ の枝 e が存在する． □

補題 3.2 $G'=(V,E)$ を孤立点を含まないグラフとし，f を R^d 上において，C を境界とした $G=G'/e$ の凸埋め込みとする．ここで e は $\{u_1,u_2\}-V(C)\neq\emptyset$ となる枝 $e=(u_1,u_2)$ とする．もし $u_i\in V-V(C)$ ならば，$|N_{G'}(u_i)|\geq d+1$ が成り立つとする $(i=1,2)$．このとき R^d 上において C を境界とする G' の R^d 上への凸埋め込み f' が存在する． □

補題 3.2 は，もし $|N_{G'}(u_i)|\geq d+1$ $(i=1,2)$ が成り立てば，R^d 上において境界 C とした G' の凸埋め込みが可能であることを意味している．ステップ 1 では 4 点連結性を保持しながら枝の縮約を行っているので，ステップ 2 におけるどのグラフにおいて，全ての節点の次数は 4 以上である．ここで境界 C の枝はアルゴリズムで縮約されないことに注意されたい．ゆえに補題 3.2 により，ステップ 2 の正当性は証明される．

最後に，$d\geq 4$ の場合，d-2 分割が存在するための十分条件に関する考察を行う．補題 3.2 により，次の (a)-(c) が成立すれば，R^d 上に G_1 を境界とした G の凸埋め込みを見つけることができる．(a) G は定義 2.1 (i) の G' と同じ性質を持つ部分グラフ G_1 を持つ．(b) 各 $v\in V(G)-V(G_1)$ において $|N_G(v)|\geq d+1$ が成り立つ．(c) $d+2$ 節点の完全グラフが得られるまで，(b) を保存しながら $E(G_1)$ でない枝を縮約し続けることができる．ゆえに，入力グラフ G が (a)-(c) を満たせば，d-2 分割が見つかることを意味する．しかし，その一方で，例えば $d=4$ の場合，5 節点の完全グラフを持つ 5 点連結グラフで，上記の (a)-(c) を満たさないグラフが存在する．

参考文献

[1] J. Chleíková: " Approximating the maximally balanced connected partition problem in graphs," Information Processing Letters, 60, 1996, 225-230.
[2] M. E. Dyer and A. M. Frieze: " On the complexity of partitioning graphs into connected subgraphs," Discrete Applied Mathematics, 10, 1985, 139-153.
[3] H. Edelsbrunner: Algorithms in Combinatorial Geometry, Spriger-Verlag, Berlin, 1987.
[4] H. Nagamochi, T. Jordán, Y. Nakao, and T. Ibaraki: " Convex embeddings bisecting of 3-connected graphs," Combinatorica, vol.22, 2002, 537-554.
[5] H. Suzuki, N. Takahashi and T. Nishizeki: "A linear algorithm for bipartition of biconnected graphs, " Information Processing Letters, 33, 1990, 227-232.
[6] K. Wada and K. Kawaguchi: " Efficient algorithms for tripartitioning triconnected graphs and 3-edge-connected graphs," Lecture Notes in Comput. Sci., 790, Springer, Graph-theoretic concepts in computer science, 1994, 132-143.