日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

繰上償還の事前通知条項が付与された転換社債の評価について

02702073　南山大学　＊八木 恭子　YAGI Kyoko
01202653　南山大学　澤木 勝茂　SAWAKI Katsushige

1 はじめに

本稿では, 企業が事前に繰上償還の通知をおこなう条項が付与された転換社債を考える. 繰上償還に事前通知のある転換社債に対する評価モデルは, Grau, Forsyth and Vetzal[3] で示された. 彼らは, 偏微分方程式に事前通知から償還までの期間を満期に持つ償還条項のない転換社債を組み入れることで定式化をおこなった.

本稿では, Duffie and Singleton [2] のクレジットリスクモデルを償還の事前通知契約が付与された転換社債に適用し, アプローチとしては異なる停止ゲームの問題として定式化する. また, 投資家の最適転換境界や企業が事前通知を判断する最適境界の定性的な性質を示す. さらに二項モデルによって数値的に転換社債の価格や境界の性質を検証する.

2 クレジットリスク

Duffie and Singleton [2] は, 満期 T での支払いを X, 配当過程を $\{D_t : 0 \leq t \leq T\}$ としたとき, デフォルトが起こりうる証券の時刻 t での価格 V_t が

$$V_t = \tilde{E}\left[e^{-\int_t^T R(u)du}X + \int_t^T e^{-\int_t^s R(u)du}dD_s\right] \tag{1}$$

で与えられることを示した. ただし, $\tilde{E}$ はリスク中立確率測度 $\tilde{P}$ の下での期待値であり, $R(t)$ は

$$R(t) = r(t) + L(t)\lambda(t) \tag{2}$$

で与えられるデフォルト調整をした割引率である. ここで, $r(t)$, $L(t)$, $\lambda(t)$ はそれぞれ, 時刻 t でのデフォルトリスクのない利子率, デフォルトに対する損失率, デフォルトハザードレートである.

3 モデルの定式化

本節では, 2節でのモデルを償還の事前通知条項が付与された転換社債へ適用する. Takahashi, Kobayashi and Nakagawa [4] や Carayannopoulos and Kalimipalli [1] なども Duffie and Singleton [2] でのクレジットリスクを用いて転換社債の評価モデルを示した.

時刻 t における株価 S_t はリスク中立確率測度 $\tilde{P}$ の下で

$$dS_t = \{r(t) - \delta(t) + \lambda(t)\}S_t dt + \kappa S_t d\tilde{Z}_t \tag{3}$$

にしたがう. ただし, $\delta(t)$ は時刻 t での配当率であり, κ はボラティリティである. また, 確率過程 $\{\tilde{Z}_t; t \leq T\}$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \tilde{P})$ 上で定義される標準ブラウン運動である.

時刻 t で株価 S_t における償還の事前通知条項が付与された転換社債の価値を $CB(t,S_t)$ とする. $CB(t,S_t)$ は満期 T をもち, T における額面総額を F とする. 株式への転換率を a とすると, 時刻 t で投資家が転換したときの価値は, aS_t となる. 企業の償還価格を $cp(t)$ とし, 償還の事前通知から償還までの期間を T_n とする.

時刻 t において償還の事前通知条項が付与された転換社債の価値 $CB(t,S_t)$ は

$$aS_t \leq CB(t,S_t) \leq \overline{CB}(t,S_t) \tag{4}$$

を満たし, 満期 T において

$$CB(T,S_T) = \max(aS_T, F) \tag{5}$$

を満たす. ただし, 時刻 t における $\overline{CB}(t,S_t)$ は, 満期 $t+T_n$ における額面総額が $cp(t+T_n)$ の償還条項のない転換社債の価格であり,

$$\overline{CB}(t,S_t) \geq aS_t, \tag{6}$$

$$\overline{CB}(t+T_n, S_{t+T_n}) = \max(aS_{t+T_n}, cp(t+T_n)) \tag{7}$$

を満たす.

時刻 t から満期 T までの停止時刻の集合を $\mathcal{T}_{t,T}$ とし, 投資家の転換時刻を $\tau \in \mathcal{T}_{0,T}$, 企業の償還の事前通知時刻を $\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}$ とする. このとき以下の定理が成立する.

定理 1 償還の事前通知条項が付与された転換社債の価格 $CB(t,s)$ は

$$\begin{aligned} CB(t,s) &= \inf_{\sigma\in\mathcal{T}_{t,T}} \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{t,T}} J_t^s(\sigma,\tau) \\ &= \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{t,T}} \inf_{\sigma\in\mathcal{T}_{t,T}} J_t^s(\sigma,\tau), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} J_t^s(\sigma,\tau) \\ = \ & \tilde{E}\Big[e^{-\int_t^T R(u)du}\max(aS_T,F)1_{\{\sigma=T,\tau=T\}} \\ + \ & e^{-\int_t^\tau R(u)du}aS_\tau 1_{\{\tau\leq\sigma\}} \\ + \ & e^{-\int_t^\sigma R(u)du}\overline{CB}(\sigma,S_\sigma)1_{\{\sigma<\tau\}}\Big| S_t = s\Big] \end{aligned} \tag{9}$$

で与えられ, 最適な投資家の転換時刻と企業の償還の事前通知時刻はそれぞれ, 停止時刻として

$$\hat{\tau}_t = \inf\{\tau \in [t,T) \mid CB(\tau,S_\tau) = aS_\tau\}$$
$$\hat{\sigma}_t = \inf\{\sigma \in [t,T) \mid CB(\sigma,S_\sigma) = \overline{CB}(\sigma,S_\sigma)\} \tag{10}$$

で与えられる. ただし, 償還条項のない転換社債 $\overline{CB}(t,s)$ は

$$\overline{CB}(t,s) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{t,t+T_n}} I_t^s(\tau), \tag{11}$$

$$I_t^s(\tau) = \tilde{E}\Big[e^{-\int_t^{t+T_n}R(u)du}\max(aS_{t+T_n}, cp(t+T_n))1_{\{\tau=t+T_n\}} + e^{-\int_t^{\tau}R(u)du}aS_\tau 1_{\{\tau<t+T_n\}}\Big| S_t = s\Big] \tag{12}$$

であり, $\overline{CB}(t,s)$ に対する最適な投資家の転換時刻は

$$\bar{\tau}_t = \inf\{\tau \in [t,T_n) \mid \overline{CB}(\tau,S_\tau) = aS_\tau\} \tag{13}$$

である.

4 最適政策

償還の事前通知条項が付与された転換社債 $CB(t,s)$ に対する企業と投資家の停止領域をそれぞれ, $\mathcal{S}^f$, $\mathcal{S}^i$ とし, 両者の継続領域を $\mathcal{C}$ とすると,

$$\mathcal{S}^f = \{(t,s) \mid CB(t,s) = \overline{CB}(t,s)\}$$
$$\mathcal{S}^i = \{(t,s) \mid CB(t,s) = as\}$$
$$\mathcal{C} = \{(t,s) \mid as < CB(t,s) < \overline{CB}(t,s)\}$$

となる. また, 償還条項のない転換社債 $\overline{CB}(t,s)$ に対する投資家の停止領域と継続領域はそれぞれ

$$\overline{\mathcal{S}}^i = \{(t,s) \mid \overline{CB}(t,s) = as\}$$
$$\overline{\mathcal{C}} = \{(t,s) \mid \overline{CB}(t,s) > as\}$$

となる. また, 各領域での時刻 t での切り口をそれぞれ $\mathcal{S}_t^f$, $\mathcal{S}_t^i$, $\mathcal{C}_t$ および $\overline{\mathcal{S}}_t^i$, $\overline{\mathcal{C}}_t$ であらわす.

定理 2 償還の事前通知条項が付与された転換社債 CB に対する投資家の最適な転換境界を s_t^i, 企業の最適な事前通知境界を s_t^f, $s_t^* = \min(s_t^i, s_t^f)$ とし, $\overline{CB}$ に対する最適転換境界を $\bar{s}_t^i$ とすると

$$\mathcal{S}_t^i = [s_t^i,\infty),\quad \mathcal{S}_t^f = [s_t^f,\infty),\quad \mathcal{C}_t = [0,s_t^*) \tag{14}$$

および

$$\overline{\mathcal{S}}_t^i = [\bar{s}_t^i,\infty),\quad \overline{\mathcal{C}}_t = [0,\bar{s}_t^i) \tag{15}$$

が成立する.

5 数値計算

本節では, 二項モデルを用いて転換社債の価値と最適境界を数値的に求める. $\Delta t = T/N$ とし, 時点を $k = 0,1,\cdots,N$ とする. また, 企業の償還における事前通知から償還までの期間の分割数を $N_n(= T_n/\Delta t)$ とする. 利子率 $r(t) = r > 0$, 配当率 $\delta(t) = (r > \delta) > 0$ を一定とし, デフォルトハザードレート $\lambda(t)$ を株価 S_t が低くなるとデフォルトの確率が高くなることを考慮し,

$$\lambda(t) = \lambda(t,S_t) = e^{-\beta S_t},\quad \beta > 0 \tag{16}$$

とする. (8) 式に対応する時点 $k = N-1, N-2, \cdots, 0$ での $CB_N^*(k)$ は, 動的計画法の最適性の原理より

$$CB_N^*(k) = \max\Big(aS_k, \min\Big(\overline{CB}^*(k), e^{-R(k+1)\Delta t}\tilde{E}[CB^*(k+1)|S_k]\Big)\Big) \tag{17}$$

で与えられ, 満期 $k = N$ のとき

$$CB^*(N) = \max(aS_N, F) \tag{18}$$

で与えられる. ただし, 時点 k における $\overline{CB}^*(k)$ は,

$$\overline{CB}_N^*(k) = \max\Big(aS_k, e^{-R(k+1)\Delta t}\tilde{E}\Big[\overline{CB}^*(k+1)\Big| S_k\Big]\Big) \tag{19}$$

であり, $\overline{CB}^*(k)$ の満期 $k + N_n$ において

$$\overline{CB}^*(k+N_n) = \max(aS_{k+N_n}, cp(k+N_n)) \tag{20}$$

である.

計算結果については発表当日に提示する.

参考文献

[1] P. Carayannopoulos and M. Kalimipalli, (2003), "Convertible Bond Prices and Inherent Biases," *Journal of Fixed Income*, **13**, 64-73.

[2] D. Duffie and K. Singleton (1999), "Modeling Term Structure of Defaultable Bonds," *Review of Financial Studies*, **12**, 687-720.

[3] A. J. Grau, P. A. Forsyth and K.R. Vetzal (2003), "Convertible Bonds with Call Notice Periods," working paper, University of Waterloo.

[4] A. Takahashi, T. Kobayashi and N. Nakagawa (2001), "Pricing Convertible Bonds with Default Risk," *Journal of Fixed Income*, **11**, 20-29.