日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

ベクトルコストによる割当て問題について

東京農工大学 *榊原 静 SAKAKIBARA Shizu
01401940 東京農工大学 中森 眞理雄 NAKAMORI Mario

1 はじめに

割当て問題とは, 従業員 $1,\ldots,n$ と仕事 $1,\ldots,n$ があり, 従業員 i が仕事 j を担当するときのコスト c_{ij} が各対 i,j ごとに定められているとき, 割当てに含まれるコストの合計を最小化するように, 従業員と仕事の 1 対 1 対応を求める問題で, 以下のように定式化される.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}:\ \text{Minimize}\quad & z=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\\
\text{subject to}\quad & \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1\quad(i=1,\ldots,n),\\
& \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1\quad(j=1,\ldots,n),\\
& x_{ij}\geq 0\quad(i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,n).\square
\end{aligned}
$$

変数 x_{ij} は従業員 i が仕事 j を担当するときに 1, それ以外のときに 0 をとる変数である. 変数 x_{ij} は整数条件がなくても, 問題 P の最適解では 0 か 1 の値をとることが知られている. また, 割当て問題はネットワークにおける最小費用流問題 [3] の特別なケースであることも良く知られており, 今日までに [1], [4], などの効果的なアルゴリズムが数多く提案されている. 割当て問題は一般的に, コストは一種類であり, 単一の目的関数の下で最小化あるいは最大化する解を求めるが, 実際の問題ではしばしば, 複数個の目的関数を同時に考慮して最適化を行う必要性がある. コストが複数ある割当て問題で最悪の目的関数値を良くするように最適化する問題の応用例では, 半導体露光装置などに使用されるレンズシステムにおいて, 誤差を最小化するレンズの組み合わせを求める問題がある. そこで, コストをベクトル化した割当て問題を考え, 各コストにおける合計値の最大を最小化する割当て問題の解法について考察した. 本論文では特にコストが 2 次元である例について述べるが, コストの次元が 3 以上の場合も同様に論じられる. コスト c_{ij} が 2 次元の割当て問題は, 従業員 i が仕事 j を担当するとき, ある視点におけるコストが c_{ij} で, 別の観点から見たコストが c'_{ij} であるとすると, 以下のように定式化される.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}':\ \text{Minimize}\quad & z\\
\text{subject to}\quad & \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\leq z,\\
& \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}c'_{ij}x_{ij}\leq z,\\
& \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1\quad(i=1,\ldots,n),\\
& \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1\quad(j=1,\ldots,n),\\
& x_{ij}=0\ \text{or}\ 1\quad(i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,n).\square
\end{aligned}
$$

問題 P′ は, 変数 x_{ij} の整数条件が必要になる. 問題 P′ は真の最適解を求めることが難しい. そこで, 本論文では問題 P′ のより良い準最適解を求めるアルゴリズムを提案することを目的とする.

2 パラメトリック割当て問題

問題 P′ の準最適解を求めるために, パラメータ t $(0\leq t\leq 1)$ を用いて次のようなパラメトリックな割当て問題を考えた.

Q′ : Minimize

$$z=t\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}c_{ij}x_{ij}+(1-t)\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}c'_{ij}x_{ij}$$

$$
\begin{aligned}
\text{subject to}\quad & \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1\quad(i=1,\ldots,n),\\
& \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1\quad(j=1,\ldots,n),\\
& x_{ij}\geq 0\quad(i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,n).\square
\end{aligned}
$$

もし t が決められていれば問題 Q′ は一般的な割当て問題と同じである. ここで, ある t $(0\leq t\leq 1)$ における問題 P′ の最適解を $\hat{x}_{ij}(t)$ としそのときの目的関数値を $F(t)$ と定義する. $\hat{x}_{ij}(1)$ と $\hat{x}_{ij}(0)$ は, 一般的な割当て問題においてコストがそれぞれ c_{ij} と c'_{ij} で

ある問題の最適解である．また，$\hat{x}_{ij}(t)$ の数は有限個である．関数 $F(t)$ について次の性質が言える．

補題 1 関数 $F(t)$ は区分的に線形である．

補題 2 関数 $F(t)$ は上に凸の関数である．

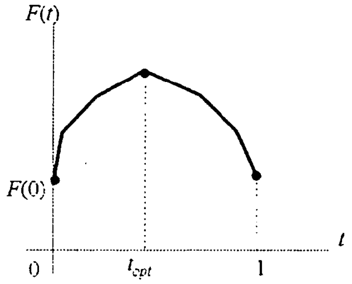

図 1: $F(t)$

ここで，関数 $F(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ の最大値を $F(t_{\mathrm{opt}})$ $(0 \leq t_{\mathrm{opt}} \leq 1)$ とする．t と $F(t)$ を座標とする $t-F(t)$ 空間を考えると，各実行可能解 $x \in X$ は $t-F(t)$ 空間でひとつの $[0,1]$ の線分 l として表現される．線分 l の直線の式は，$l = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(c_{ij}-c'_{ij}\right)x_{ij}\right)t + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}c'_{ij}x_{ij}$ となる．線分 l の $t=1$ との交点は $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$ となり，$t=0$ との交点は $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}c'_{ij}x_{ij}$ となる．また，問題 P' の目的関数値は，線分 l の傾きが正ならば $t=1$ との交点で，傾きが負ならば $t=0$ との交点となる．$t-F(t)$ 空間では多数の実行可能解による $[0,1]$ の線分が存在し，$\hat{x}_{ij}(t')$ が描く線分は，$t=t'$ の直線と一番下方で交わる線分である．$t=t_{\mathrm{opt}}$ における問題 Q' の最適解は，関数 $F(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ が 2 つ以上の解による線分で作られている場合は，$\hat{x}_{ij}(t_{\mathrm{opt}}-\Delta t)$ と $\hat{x}_{ij}(t_{\mathrm{opt}}+\Delta t)$ の少なくとも 2 つ以上存在し，このうち問題 P' の目的関数値がよいほうの解を $\tilde{x}_{ij}(t_{\mathrm{opt}})$ とする．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 1 解 $\tilde{x}_{ij}(t_{\mathrm{opt}})$ は，$(0 \leq t' \leq 1)$ のどの t' における $\hat{x}_{ij}(t')$ よりも良い問題 P' の解を与える．

解 $\tilde{x}_{ij}(t_{\mathrm{opt}})$ は，以下のアルゴリズムで求められる．

アルゴリズム

初期値として $t_1 = 0$, $t_2 = 1$;

$s1 = \hat{x}_{ij}(t_1)$ の傾き; $s2 = \hat{x}_{ij}(t_2)$ の傾き;

if$(s1 < 0)$ $\{\tilde{x}_{ij}(t_{\mathrm{opt}}) = \hat{x}_{ij}(t_1)$; 終了;$\}$

if$(s2 > 0)$ $\{\tilde{x}_{ij}(t_{\mathrm{opt}}) = \hat{x}_{ij}(t_2)$; 終了;$\}$

$\hat{x}_{ij}(t_1)$ と $\hat{x}_{ij}(t_2)$ の交点を (t_3, F') とする;

while$(F' != \hat{x}_{ij}(t_3))\{$

　　$s3 = \hat{x}_{ij}(t_3)$ の傾き;

　　if$(s3 == 0)\{$ $\tilde{x}_{ij}(t_{\mathrm{opt}}) = \hat{x}_{ij}(t_3)$; 終了; $\}$

　　if$(s3 > 0)$　$t_1 = t_3$;

　　if$(s3 < 0)$　$t_2 = t_3$;

　　$\hat{x}_{ij}(t_1)$ と $\hat{x}_{ij}(t_2)$ の交点を (t_3, F') とする;

$\}$

$\hat{x}_{ij}(t_1)$, $\hat{x}_{ij}(t_2)$, $\hat{x}_{ij}(t_3)$ の問題 P' の目的関数値の最も良いものを $\tilde{x}_{ij}(t_{\mathrm{opt}})$ とする; 終了;

3 比較実験

変数 $\tilde{x}_{ij}(t_{\mathrm{opt}})$ が真の最適解にどの程度近いかを調べるために比較実験を行った．真の最適解との誤差率を各 n につき 100 個の問題の平均値で示した．

表 1: 誤差率

n	誤差率 (%)
10	2.53
20	3.04
50	1.92
100	1.06
110	1.08
150	0.89
200	0.71

n が 10 から 200 の範囲では，n が大きくなるにしたがって，真の最適解との誤差率は小さくなる傾向があることがわかる．

4 おわりに

古典的な割当て問題を拡張してコストをベクトル化した割当て問題を考え，各コストの合計を最小化する問題を定義した．この問題について，パラメトリックな割当て問題を考え，パラメトリックな割当て問題によって定義される解が良い準最適解を与えることを，理論的と実験的に示した．

参考文献

[1] Ahuya, R. K., A. V. Goldberg, J. B. Orlin, and R. E. Tarjan, Finding minimum-cost flows by double scaling, *Mathematical Programming, Ser. A*, **53**, 243-266 (1992).

[2] Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton Univ. Press, 1963.

[3] Ford, L. R. Jr. and D. R. Fulkerson, *Flows in Networks*, Princeton Univ. Press, 1962.

[4] Tokuyama, T. and J. Nakano, Geometric algorithms for a minimum cost assignment problem, *Proc. 7th Annual Symp. Computational Geometry*, 262-271 (1991).