

デジタル・ハーフトーニングへの 数理工学的アプローチ

菊地 洋右, 浅野 哲夫

1. デジタル・ハーフトーニング

パソコンのモニタ上の写真とそれをプリンタで印刷したものを比べてみたことがあるでしょうか？ 比べてみるとモニタ上のものの方がきれいに見えることでしょうか。では、なぜモニタの方がきれいなのでしょう？ パソコンのモニタではその設定にもよるけれども1画素につき赤、緑、青をそれぞれ256階調の濃淡をもっています。つまり1画素で $256^3=16,777,216$ 色を表現できます。では、もう一方のプリンタを見てみましょう。トナー交換やインク交換をするときにカラープリンタなら4色くらいですし、モノクロームなら黒のインクしか入っていません。4色のカラープリンタの場合はシアン、マゼンタ、黄色そして黒のインクが用意されています。たった4色のトナーで16,777,216色を印刷できるわけではありません。最近では中間色のインクを用意して、8色のインクを持つプリンタもありますが、この方法でも16,777,216色は印刷できません。つまりモニタでは黄色を256階調の濃淡で映し出していますかプリンタでは黄色のインクを紙に吹き付けるか吹き付けないかの2通りしかないわけです。このためモニタの写真の方が印刷したものよりきれいに見えるのです。すると、プリンタにとって階調が中間の色をどう印刷するかその善し悪しにつながってきます。つまりプリンタは256の濃淡を0から255に振り分けて原画を近似しているのです。この振り分けをデジタル・ハーフトーニングと言います[9]。そして、その振り分け方のアルゴリズムには様々なものが提案されています。問題を考えやすくするために単一色からなる画像（モノクローム画像）について考えることにします。いくつかのアルゴリズム

を紹介します。ここでは、単純二値化法、組織的ティサ法、誤差拡散法について述べます。

単純二値化法ではある閾値を設定して各画素について、その明るさが閾値以下なら0に、閾値より上なら255にします。この方法は単純なため画像が多階調画像ですと原画に似たものは得られません。多階調画像でなくとも、階調が127である灰色一色の画像は閾値が127ならば、黒一色の画像になりますし、128である灰色一色の画像は白い画像になります。図1は単純二値化法を施した画像です。ところどころ画像が潰れているのが分かります。ただ、この方法にも長所はあってコピーやスキャナで白色度の低い紙に書かれた文字を読みとる時には閾値を紙の色と文字の色の間に設定することで文字だけを読みとるようにできます。この閾値の決め方にもいくつかの方法があります[12]が本題から離れていくので、ここでは省きます。

組織的ティサ法は単純二値化方法に改良を加えたものと言えます。単純二値化方法ではある特定の閾値を決めましたが、この方法は各画素について異なる閾値を用います。異なる閾値といっても各画素の階調を考慮して決めるのではなく、ティサ行列と呼ばれる行列を用意し、そのティサ行列の各値を閾値とします。下記の例は原画が 4×4 の画素である場合のBayer型と呼ばれるティサ行列です[6]。原画が256階調の場合



図1 単純二値化法を施した画像（木の上の2匹の亀）

きくち ようすけ

(株)科学技術振興機構 今井量子計算機構プロジェクト

〒113-0033 文京区本郷5-28-3

あさの てつお

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

〒923-1292 石川県能美郡辰口町旭台1-1

これらの値を 16 倍したものが閾値となります。

$$D_4 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 10 \\ 12 & 4 & 14 & 6 \\ 3 & 11 & 1 & 9 \\ 15 & 7 & 13 & 5 \end{pmatrix}$$

この例の 2 行 3 列めの値は 14 なので $14 \times 16 = 224$ を閾値として対応する原画の画素を 0 か 255 に振り分けます。この方法では確率として階調が g の画素を確率 $g/256$ で黒とします。すると階調とその確率の 256 倍は一致するので、原画の色の濃淡を反映しているように思えます。ということで画素数が十分多ければ、良い結果が得られます。そして少ないと当然、悪い結果になります。組織的ディザ法ではディザ行列の値を次のように決めます。

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_{2^n} = \begin{pmatrix} 4D_{2^{n-1}} & 4D_{2^{n-1}} + 2J_{2^{n-1}} \\ 4D_{2^{n-1}} + 3J_{2^{n-1}} & 4D_{2^{n-1}} + J_{2^{n-1}} \end{pmatrix}.$$

ただし、 J_{2^n} はすべての要素が 1 である $2^n \times 2^n$ 行列です。このように再帰的に要素の値を決めてできる行列を用いるのを組織的ディザ法、ランダムに値を決めていくのをランダムディザ法と呼びます。また、組織的ディザ法で用いるディザ行列にも閾値が中心では小さく周辺では大きいドット集中型と閾値がなるべく均等になるように構成されたドット分散型があります。Bayer 型はドット分散型の一つです。図 2 は組織的ディザ法を施した画像ですが、周期的な模様が見てとれます。

誤差拡散法は上記の二つの方法とはだいぶ異なります。上記の二つの方法では各画素を周りの画素を考慮せずに二値化しました。誤差拡散法では閾値との誤差を周囲の画素に振り分けていきます。原画の各行を順に右から左に走査することをラスタ走査と言います。これはインクジェットプリンタのヘッドの動きと同じです。このラスタ順に誤差をまだ走査していない周囲の画素に振り分けます。次に代表的な誤差拡散行列 E_1, E_2 を示します。

$$E_1 = \begin{pmatrix} \bullet & \circ & 7/16 \\ 3/16 & 5/16 & 1/16 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \circ & 7/48 & 5/48 \\ 3/48 & 5/48 & 7/48 & 5/48 & 3/48 \\ 1/48 & 3/48 & 5/48 & 3/48 & 1/48 \end{pmatrix}$$

E_1, E_2 において \bullet はすでに走査済みの画素、 \circ は現在、

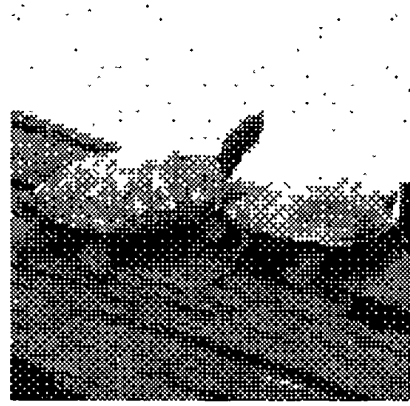


図 2 組織的ディザ法を施した画像（木の上の 2 匹の亀）



図 3 誤差拡散法を施した画像（木の上の 2 匹の亀）

走査している画素です。○と閾値との差 \times 誤差拡散行列の値をその対応する画素に加えていきます。この方法では大きな誤差拡散行列を用いれば滑らかな画像が得られます。しかし解像能は低下します。実際には、この方法を改良したものがインクジェットプリンタに広く使われています。誤差拡散法を施した図の例が図 3 です。誤差拡散法特有の粒状の模様が現れています。

この他にもブルーノイズマスク法[11]という方法があります。これはディザ法と人間の視覚特性（空間周波数の高周波成分を検出しにくい）を組み合わせることで画像のノイズを目立たなくする方法です。この方法を用いると誤差拡散法と同程度の画像が得られます。

このように様々な手法が提案されているのは二値化する原画や目的によってそれぞれに一長一短があるためです。

ここでもう一度 Bayer 型ディザ行列について考えてみましょう。灰色の原画を二値化することを考えます。このとき Bayer 型ディザ行列の閾値の高い値と低い値は均等に分布しているために灰色に見える画像が構成できるわけです。

2. 食い違い度からみたディザ行列

さて、デジタル・ハーフトーニングはある種の近似なのですが、その尺度が問題となります。現実には印刷されたものがきれいかどうかの判断は人間の目に頼っています。これでは客観性に欠ける部分があるでしょう。というか、近似というからには数学的にモデル化して較べてみたいと数理工学者は思うわけです。では、どういう尺度が良いのでしょうか、何か客観的な基準はないのでしょうか？ 先ほど閾値の高い値と低い値が均等に分布していると書きました。\$D_4\$ の例をみると 0 と 1 は斜めに 1 マス離れていて 15 と 14 も同じだけ離れています。0 と 2 は 15 と 13 と同じだけ離れています。この均等に分布していることによりどの部分を見ても部分の閾値の平均が同じ程度になり、平均的に黒い画素がばらまかれて灰色に見えると考えられそうです。そこで、この均等に分布しているという状況を数学的に評価すればディザ行列の近似の良さを評価できそうです。

様々な基準があると思いますが、ここでは食い違い度 (discrepancy) [5, 7, 8, 10] という基準で考えてみましょう。

食い違い度は \$[0, 1]\$ 区間内の点列の一様性や、幾何の点配置の一様性を測る尺度として生まれました。\$[0, 1]\$ 区間内の無限点列 \$s=(s_1, s_2, \dots)\$ が一様に分布しているというのを任意の半開区間 \$[a, b]\$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} |\{s_1, \dots, s_n\} \cap [a, b]| \right) = b - a$$

で定義します。\$n\$ を無限大にとばしたとき、\$s\$ 中の点が \$[a, b]\$ に含まれる確率が \$b - a\$ に等しければ一様であるというわけです。実際に一様である点列は存在します。無理数 \$r\$ に対して、\$s=(s_1, s_2, \dots)\$ を \$s_n = \{rn\}\$ で与えます。ここで \$\{rn\}\$ は \$rn\$ の小数部分をあらわすものとします。このとき、\$s\$ は \$[0, 1]\$ 区間で一様となることが知られています。では、点列がどれだけ一様ではないかという尺度を考えましょう。先ほどの一様であることの式から、

$$D(s, n) = \sup_{0 \leq a \leq b \leq 1} |\{s_1, \dots, s_n\} \cap [a, b]| - n(b - a)$$

を考えます。これが点列 \$s\$ の食い違い度です。点列に対する食い違い度と同様に 2 次元の有界な平面における点の分布の食い違い度も考えることができます。これについては計算幾何の分野で盛んに研究されてきました。\$\mathcal{R}^2 = [0, 1]^2\$ の単位正方形と \$\mathcal{R}\$ 内の \$n\$-頂点の

集合 \$P\$ を考えます。\$A \subset \mathcal{R}^2\$ の族を \$\mathcal{A}\$ とします。\$V(A)\$ を \$A\$ に含まれる点の個数とします。このとき、

$$D(P, A) = nV(A) - |P \cap A|$$

$$D(P, \mathcal{A}) = \sup_{A \in \mathcal{A}} D(P, A)$$

とおきます。\$D(P, \mathcal{A})\$ は \$P\$ と \$\mathcal{A}\$ が与えられたときの、\$P\$ の \$\mathcal{A}\$ における食い違い度です。さらに、

$$D(n, \mathcal{A}) = \inf_{\substack{P \subset \mathcal{R}^2 \\ |P|=n}} D(P, \mathcal{A})$$

が \$\mathcal{A}\$ の食い違い度となります。\$\mathcal{A}\$ が \$\mathcal{R}^2\$ 内の長方形領域の集合であるとき \$O(\log n)\$ であることが知られています。

さて、ディザ行列に戻しましょう。\$n \times n\$ のディザ行列には 0 から \$n^2 - 1\$ までの数字がおのおの 1 回ずつ現れます。この値を頂点の個数だと思えます。では、上の \$\mathcal{A}\$ に相当するものと考えましょう。\$n \times 1, 1 \times n\$ の集合を要素とする \$\mathcal{A}\$ を考えてみましょう。この場合、食い違い度か 0 になるものは半魔法陣と呼ばれています。つまり、半魔方陣とは \$n \times n\$ 行列で要素が \$0, \dots, n^2 - 1\$ によって満たされていて、各行、各列の和が等しいものです。ここでは各行、各列の和の代わりに任意の \$k \times k\$ の連続する部分行列の和を考えましょう。つまり、\$k \times k\$ の連続する部分行列の集合が先ほどの \$\mathcal{A}\$ に相当します。\$k \times k\$ の連続する部分行列の和が等しい \$n \times n\$ 行列を \$k \times k\$ 一様 \$n \times n\$ 行列と呼び、\$\mathcal{N}(k, n)\$ を \$k \times k\$ 一様 \$n \times n\$ 行列の集合とします。

3. \$k \times k\$ 一様 \$n \times n\$ 行列

正整数 \$n > 1\$ に対して、\$\mathcal{Z}(n, m)\$ を \$n \times n\$ 整数行列で要素が \$\{0, \dots, m-1\}\$ の要素であるものとします。さらに \$\mathcal{Z}(n) \subset \mathcal{Z}(n, n^2)\$ を \$\{0, \dots, n^2 - 1\}\$ のすべての要素を含む \$n \times n\$ 行列とします。

\$k \times k\$ の連続した部分行列 (以下、領域と呼ぶ) を \$R_{i,j} = R_{i,j}^{(k)}\$ を \$(i, j)\$ を左上の要素とし、

$$R_{i,j}^{(k)} = \left\{ (i', j') \left| \begin{array}{l} i' = i, \dots, i+k-1 \text{ かつ} \\ j' = j, \dots, j+k-1 \end{array} \right. \right\},$$

で定義します。ここで \$i, j\$ は \$n\$ を法とします。

行列 \$P\$ と \$k \times k\$ の領域 \$R_{i,j}\$ について \$P(R_{i,j})\$ で \$R_{i,j}\$ に含まれる \$P\$ の要素の総和をあらわすことにします。同様に \$C_{i,j} = C_{i,j}^{(k)}\$ は要素 \$(i, j)\$ を最左要素とする \$k \times 1\$ の領域であり、\$P(C_{i,j})\$ は \$C_{i,j}\$ に含まれる \$P\$ の要素の総和をあらわします。ここでは、\$n \times n\$ 行列に現れる \$k \times k\$ 領域の族

$$\mathcal{F}_{k,n} = \{R_{i,j}^{(k)} \mid i, j = 0, 1, \dots, n-1\}$$

に着目していきます。この族 \$\mathcal{F}_{k,n}\$ に対する \$n \times n\$ 行

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \\ 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 \\ 32 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 39 \\ 40 & 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 & 47 \\ 48 & 49 & 50 & 51 & 52 & 53 & 54 & 55 \\ 56 & 57 & 58 & 59 & 60 & 61 & 62 & 63 \end{bmatrix}$$

↓

$$\begin{bmatrix} 0 & 62 & 2 & 60 & 4 & 58 & 6 & 56 \\ 55 & 9 & 53 & 11 & 51 & 13 & 49 & 15 \\ 16 & 46 & 18 & 44 & 20 & 42 & 22 & 40 \\ 39 & 25 & 37 & 27 & 35 & 29 & 33 & 31 \\ 32 & 30 & 34 & 28 & 36 & 26 & 38 & 24 \\ 23 & 41 & 21 & 43 & 19 & 45 & 17 & 47 \\ 48 & 14 & 50 & 12 & 52 & 10 & 54 & 8 \\ 7 & 57 & 5 & 59 & 3 & 61 & 1 & 63 \end{bmatrix}$$

図4 定理1(a)の具体例

列 P の $k \times k$ -discrepancy $\mathcal{D}_{k,n}(P)$ を

$$\mathcal{D}_{k,n}(P) = \max_{R \in \mathcal{F}_{k,n}} P(R) - \min_{R' \in \mathcal{F}_{k,n}} P(R')$$

で定義します。まず、 $\mathcal{D}_{k,n}(P) = 0$ となる、つまり $k \times k$ 一様 $n \times n$ 行列 $P \in \mathcal{Z}(n)$ はあるのかを考えます。すると次のことが分かります。

定理1 $k \times k$ 一様 $n \times n$ 行列の集合 $\mathcal{N}(k, n)$ について次の性質が成り立つ[1].

- (a) k と n がともに偶数ならば $\mathcal{N}(k, n) \neq \emptyset$.
- (b) k と n が互いに素ならば $\mathcal{N}(k, n) = \emptyset$.
- (c) k が奇数かつ n が偶数ならば $\mathcal{N}(k, n) = \emptyset$.
- (d) 任意の整数 k と $m (k \geq 2, m \geq 2)$ に対して $\mathcal{N}(k, k^m) \neq \emptyset$.

上のことから(a), (d)の場合には $k \times k$ 一様 $n \times n$ 行列が存在します。実際、(a)については $i+j$ が奇数となる (i, j) 成分 $p_{i,j}$ を $p_{n-1-i, n-1-j}$ に移すことで得られます。図4は $n=8$ の場合の例となっています。

(d)については次の節で少し詳しくみてみましょう。

4. $k \times k$ 一様 $k^m \times k^m$ 行列の構成

任意の整数 m について $k \times k$ 一様 $k^m \times k^m$ 行列を構成します。まず、 $k \times k$ 一様 $k^2 \times k^2$ 行列の存在を示し、この結果を用いて $k \times k$ 一様 $k^m \times k^m$ 行列に対する結果を得ます。

まず、 \tilde{P} を定義します。これは $k \times k$ のすべての要素が1である行列 J と $k \times k$ 行列 P のテンソル積です。

$$J \otimes P = \tilde{P} = \begin{bmatrix} P & P & \cdots & P \\ P & P & \cdots & P \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P & P & \cdots & P \end{bmatrix}$$

次に $k \times k$ 行列 P の cyclic column shift を P の j 列を $j+1$ 列に移し、 k 列を1列に移す操作とします。同様に cyclic row shift を P の i 行を $i+1$ 行に移し、 k 行を1行に移す操作とします。そして、この行列 P に c 回の cyclic column shift と r 回の cyclic row shift を施した行列を $P^{(c,r)}$ と表記します。つまり、 P の (i, j) 成分は $P^{(c,r)}$ では $((i+r) \pmod k, (j+c) \pmod k)$ 成分になります。この $P^{(c,r)}$ を使って $k^2 \times k^2$ 行列 $\hat{P} = (\hat{p}_{i,j})$ を

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} P^{(0,0)} & P^{(0,1)} & \cdots & P^{(0,k-1)} \\ P^{(1,0)} & P^{(1,1)} & \cdots & P^{(1,k-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P^{(k-1,0)} & P^{(k-1,1)} & \cdots & P^{(k-1,k-1)} \end{bmatrix}$$

と定義します。このとき、任意の i, j に対して $\hat{p}_{i,j} = p_{i,j}$ となるのは

$$i' = i + \lfloor j/k \rfloor \text{ かつ } j' = j + \lfloor i/k \rfloor \pmod k.$$

のときであることが分かります。

行列 $P = (p_{i,j})$ が、どの i, i', j, j' に対しても

$$p_{i,j} - p_{i',j'} = p_{i,j} - p_{i',j'}$$

を満たすとき、行列 P を定差行列 (constant-gap matrix) と呼びます。

定差行列の定義から、行、列の入れ換えに対して定差行列の性質は保存されます。また、正方行列のときには、転置に対しても定差行列の性質は保存されることか分かります。

P が $k \times k$ 定差行列ならば、 \hat{P} は $k \times k$ 一様行列になります。

$P = (p_{i,j})$, $Q = (q_{i,j})$ をそれぞれ $\mathcal{Z}(k)$ の行列とします。そして \tilde{P} と \tilde{Q} を用いて次の二つの行列 $C^{(1)} = C^{(1)}(P, Q) = (c_{i,j}) = \tilde{Q} + k^2 \tilde{P}$, $C^{(2)} = C^{(2)}(P, Q) = (c'_{i,j}) = \tilde{P} + k^2 \tilde{Q}$ を新たに作ります。このとき、 P が $k \times k$ 定差行列ならば、

1. $C^{(1)}$ と $C^{(2)}$ は $\mathcal{Z}(k^2)$ に含まれる行列であり、
2. $C^{(1)}$ と $C^{(2)}$ は $k \times k$ 一様行列になります。

さらに $P \neq Q$ ならば、 $C^{(1)} \neq C^{(2)}$ となります。この結果は $\mathcal{N}(k, k^m)$ の $m=2$ の場合です。この結果を拡張することで、任意の整数 $k, m \geq 2$ に対して $\mathcal{N}(k, k^m) \neq \emptyset$ であることが示せます。ポイントは $m \in \{0, \dots, k^m - 1\}$ は $m = \sum_{i=0}^{m-1} ak^{2^i}$, $0 \leq a \leq k^2 - 1$ と一意に表現

でき、 i の値ごとに $k \times k$ 定差行列を作ることにあります。また、 $k \times k$ 一様 $k^m \times k^m$ 行列であることの判定は $O(mk^2)$ の領域計算量を用いて線形時間でできます。例として $k=2, m=3$ の $k \times k$ 一様 $k^m \times k^m$ 行列を構成してみましょう。

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

とします。このとき

$$M = k^4 \begin{bmatrix} P^{(0,0)} & P^{(0,0)} & P^{(0,1)} & P^{(0,1)} \\ P^{(0,0)} & P^{(0,0)} & P^{(0,1)} & P^{(0,1)} \\ P^{(1,0)} & P^{(1,0)} & P^{(1,1)} & P^{(1,1)} \\ P^{(1,0)} & P^{(1,0)} & P^{(1,1)} & P^{(1,1)} \end{bmatrix} + k^2 \begin{bmatrix} P^{(0,0)} & P^{(0,1)} & P^{(0,0)} & P^{(0,1)} \\ P^{(1,0)} & P^{(1,1)} & P^{(1,0)} & P^{(1,1)} \\ P^{(0,0)} & P^{(0,1)} & P^{(0,0)} & P^{(0,1)} \\ P^{(1,0)} & P^{(1,1)} & P^{(1,0)} & P^{(1,1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P & P & P & P \\ P & P & P & P \\ P & P & P & P \\ P & P & P & P \end{bmatrix}$$

とすると、

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 41 & 4 & 45 & 16 & 57 & 20 & 61 \\ 22 & 63 & 18 & 59 & 6 & 47 & 2 & 43 \\ 8 & 33 & 12 & 37 & 24 & 49 & 28 & 53 \\ 30 & 55 & 26 & 51 & 14 & 39 & 10 & 35 \\ 32 & 9 & 36 & 13 & 48 & 25 & 52 & 29 \\ 54 & 31 & 50 & 27 & 38 & 15 & 34 & 11 \\ 40 & 1 & 44 & 5 & 56 & 17 & 60 & 21 \\ 62 & 23 & 58 & 19 & 46 & 7 & 42 & 3 \end{bmatrix}$$

となり、 M は 2×2 一様 8×8 行列となっています。

今まで述べてきた $k \times k$ 一様 $k^m \times k^m$ 行列の構成には $k \times k$ 定差行列が重要な役割をします。そして異なる定差行列を選ぶことで、異なる一様行列が得られます。では、行列の大きさと与えられたとき、定差行列はいくつあるのでしょうか？ここでは、 $\mathbb{Z}(n)$ の定差行列の特徴づけについて考えていきます。少し一般的な場合で考えてみましょう。まず、 $\mathbb{M}(m, n)$ を $0, \dots, mn-1$ を要素とし、すべてを要素とする $m \times n$ 行列の集合とします。任意の i, j, i', j' に対して $m_{i,j} + m_{i',j'} = m_{i,j'} + m_{i',j}$ であるとき、行列 $M = (m_{i,j}) \in \mathbb{M}(m, n)$ は定差であると呼びます。これは先に定義した正方行列の場合と同じです。また、行列の行置換、

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 12 & 13 \\ 10 & 11 & 14 & 15 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 10 & 11 \\ 4 & 5 & 12 & 13 \\ 6 & 7 & 14 & 15 \end{bmatrix}$$

図5 $n=3$ の定差行列の同値類の標準形と $n=4$ の定差行列の同値類の標準形

列置換、転置に対して定差の性質が保存されることも正方行列の場合と同様に成り立ちます。これらの性質を考慮し、行置換、列置換、転置を施して同じ行列となる場合はその行列は同値であるとして同じものとみなします。ただし、転置を施して同じとなるのは正方行列だけです。

これで $\mathbb{M}(m, n)$ が同値類に分けられました。そこで各同値類の標準形を次の性質を満たす行列 $P = (p_{i,j}) \in \mathbb{M}(m, n)$ とします。

- (a) P のすべての行はソートされている。つまり $p_{i,0} < p_{i,1} < \dots < p_{i,n-1}$ となっている。簡単のため、 $i=0, \dots, n-1$ に対して $r_i = p_{i,0}$ とします。
- (b) P のすべての列はソートされている。これは(a)と同様に $p_{0,j} < p_{1,j} < \dots < p_{n-1,j}$ ということです。これも $j=0, \dots, n-1$ に対し、 $c_j = p_{0,j}$ とします。
- (c) (a), (b)をまとめると $i \leq i', j \leq j'$ 、かつ $(i, j) \neq (i', j')$ ならば $p_{i,j} < p_{i',j'}$ となります。
- (d) $p_{0,0} = c_0 = r_0 = 0, p_{m,n} = mn - 1$ 。
- (e) P は $(c_j), (r_i)$ によって決まり、 $p_{i,j} = r_i + c_j$ となります。

$n=3$ のとき $\mathbb{Z}(n)$ の定差行列の同値類の個数は一つだけであることは簡単に分かります。 $n=4$ のときは同値類の個数は三つです。また、 $n=5$ のとき $\mathbb{Z}(n)$ の定差行列の同値類の個数は一つだけです。 $\mathbb{M}(m, n)$ の定差行列の標準形の集合を $\mathbb{K}(m, n)$ とあらわすことにします。特に、 $\mathbb{K}(n, n)$ を $\mathbb{K}(n)$ とあらわすことにします。整数 $m, n > 0$ に対し $\mathbb{K}(m, n)$ と $\mathbb{K}(n)$ がどのような集合なのかを考えましょう。

まず、与えられた行列 $P = (p_{i,j}) \in \mathbb{K}(m, n)$ と $Q = (q_{i,j}) \in \mathbb{K}(m', n')$ に対して拡張積 $P \odot Q$ を定義します。これは $P \odot Q = H = (h_{i,j})$ とすると

$$h_{i,j} = m' n' p_{\lfloor i/m \rfloor, \lfloor j/n \rfloor} + q_{i \bmod m, j \bmod n}$$

と与えられます。これはテンソル積を用いると

$$H = m'n'P \otimes J_{m,n} + J_{m,n} \otimes Q$$

とも書けます。

$\mathbb{K}(m, 1)$, $\mathbb{K}(1, n)$ はともに一つの要素しかありません。それらの要素の拡張積からつくられる行列は $\mathbb{M}(m, n)$ の要素で、定差行列になります。特に $m, n > 1$ に対して $|\mathbb{K}(m, n)| \geq 2$ であり、 $\mathbb{K}(n)$ では、つくられた二つの行列は同じ標準形を持つので、 $n > 1$ に対して $|\mathbb{K}(n)| \geq 1$ となります。また、 $P \in \mathbb{K}(m, n)$, $Q \in \mathbb{K}(m', n')$ ならば $P \odot Q \in \mathbb{K}(mm', nn')$ となります。

$\mathbb{K}(1, n)$ の要素を単純行、 $\mathbb{K}(m, 1)$ の要素を単純列と呼ぶことにします。

これにより $\mathbb{K}(m, n)$ は次のように特徴づけられます。

(a) $P \in \mathbb{K}(m, n)$ は

$$P = P_1 \otimes \cdots \otimes P_k$$

と一意に表現できます。ただし、 P_1, \dots, P_k は長さが 2 以上の単純行、単純列の交互列です。 $m = n = 1$ のときは $k = 0$ と定義します。

(b) $m, n > 0$ に対して $\mathbb{K}(m, n) = \emptyset$ となります。 $|\mathbb{K}(m, n)| = 1$ となるのは $n = 1$ または $m = 1$ であり、かつそのときに限ります。この場合、 $\mathbb{K}(m, n)$ は単純行、単純列のみからなります。

$P \in \mathbb{K}(m, n)$ において整数 $j \neq k$ に対して、列差を $p_{0,j} - p_{0,k} = p_{i,j} - p_{i,k}$ で定義します。定差行列の性質から列差は行のとり方に依存しません。同様に行差を整数 $i \neq k$ に対して $p_{i,0} - p_{k,0} = p_{i,j} - p_{k,j}$ と定義します。

このとき、どの行差と列差も同じとはなりません。つまり、任意の $0 \leq i < k \leq n-1$ と $0 \leq j < l \leq n-1$ に対して $p_{0,k} - p_{0,i} \neq p_{l,0} - p_{j,0}$ となります。 $P = (p_{i,j}) \in \mathbb{K}(m, n)$ とし、 P の一つの行を考えます。その行の最後の要素と最初の要素は連続しているとします。 P

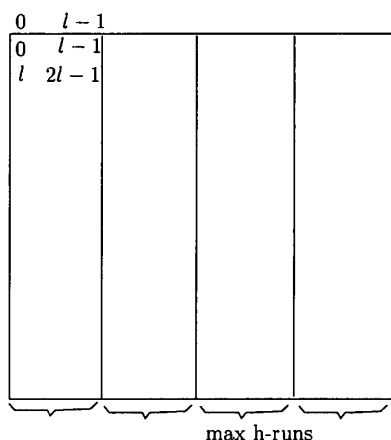


図 6 h-run の長さによる行列の分割

の horizontal run (h-run) をその行の中で最長の連続した整数列とします。また、h-run の長さを含まれる整数の個数とします。このとき、h-run の長さは少なくとも 2 となります。特に $p_{0,0}$ から始まる行での h-run を initial h-run と呼びます。 $p_{0,0}$ から始まる列の長さを l とします。すると、このときの行差 $p_{1,0} - p_{0,0}$ は l となります (図 6 参照)。

この h-run について、どの h-run の長さも initial h-run の長さを越えることはありません。

さらに言えば、すべての h-run は同じ長さになります。

行差、列差の性質と h-run の性質から先ほど挙げた $\mathbb{K}(m, n)$ の特徴づけは得られます。

$k \times k$ 一様 $k^m \times k^m$ 行列の特徴づけがこれでできたわけですが、実は定理 1(d) については、任意の整数 a, k と $m (k \geq 2, m \geq 2)$ に対して $N(ak, k^m) \neq \emptyset$ ということになりがちです。ここでは、デジタルハーフトーニングに用いられる手法を概観しました。特にオーダードディザ法に用いられる Bayer のディザ行列の性質に着目して、食い違い度の観点から、 $n \times n$ 行列の性質について考察しました。特に、 $k \times k$ 一様 $k^m \times k^m$ 行列の特徴づけを行いました。

実際には、人間の視覚特性などを数理工学的にきちんとモデル化できればいいのですが、なかなかうまくいきません。提案した行列をブルーノイズ法に適用した場合どうなるかは興味のあるところです。

謝辞 この原稿を書くことを薦めてくださった文教大学の根本俊男先生に感謝致します。

参考文献

- [1] B Aronov, T Asano, Y Kikuchi, S C Nandy, S Sasahara, T Uno "A generalization of magic squares with applications to digital halftoning," accepted *Annual international Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2004)*
- [2] 浅野哲夫 "ティシタル・ハーフトーニング: アルゴリズム工学の視点" 情報処理, Vol 43, No 5, pp 554-561, 2002
- [3] T Asano, N Katoh, K Obokata, T Tokuyama "Combinatorial and Geometric Problems Related to Digital Halftoning," *Theoretical Foundations of Computer Vision. Geometry, Morphology, and Computational Imaging*, LNCS 2616, Springer, 2003
- [4] T Asano "Digital Halftoning Algorithm Engi-

- neering Challenges," *IEICE Trans on Inf and Syst*, Vol E 86-D, No 2, pp 159-178, 2003
- [5] T Asano, K Obokata, N Katoh, T Tokuyama
"Matrix rounding under the L_p -discrepancy measure and its application to digital halftoning," *Proc ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp 896-904, San Francisco, 2002
- [6] B E Bayer · "An optimum method for two-level rendition of continuous-tone pictures," *Conference Record, IEEE International Conference on Communications*, 1, pp (26-11)-(26-15), 1973
- [7] J Beck, V T Sós: "Discrepancy theory" *Handbook of Combinatorics*, Vol II, pp 1405-1446, R Graham, M Grottschel, L Lovász Eds, Elsevier Science, 1995
- [8] B Chazelle · *The Discrepancy Method. Randomness and Complexity*, Cambridge University Press, 2000
- [9] 岩本明人, 小寺宏, 編 テシタルハードコピー技術, 共立出版, 2000
- [10] J Matoušek *Geometric Discrepancy*, Springer, 1991
- [11] T Mitsa, K J Parker · "Digital halftoning technique using a blue-noise mask," *J Opt Soc Am, A/* Vol 9, No 11, pp 1920-1929, 1992
- [12] 村上伸一 画像処理工学, 東京電機大学出版局, 1996