OR 研究の最前線

切出し・詰込み問題とその応用 —(2)長方形詰込み問題—

今堀　慎治，梅谷　俊治

1. はじめに

本シリーズ（切出し・詰込み問題とその応用）では，いくつかの対象物を互いに重ならないように配置する切出し・詰込み問題に関して，代表的な手法から最新の研究までを解説している．2回目の今回は，長方形詰込み問題に焦点を当て，問題，解法，およびその応用について解説しようと思う．

長方形詰込み問題（rectangle packing problem）は，様々な大きさの長方形（製品）を二次元平面（母材）上に重なりなく配置する問題であり，幾何学や組合せ最適化の分野で古くから研究されてきた．また，VLSI 設計においてモジュールの配置を決定する問題や，鉄鋼・繊維産業において，大きな鉄板や布から注文に応じた大きさの製品に切り分ける問題といった，実際的な問題とも密接な関わりを持ち，近年盛んに研究が行われている．

本稿では，次の二つの視点から，長方形詰込み問題についての解説を行う．まず，長方形詰込み問題には非常に多くのバリエーションがあるという点に注目し，長方形詰込み問題に分類される様々な問題の紹介を行う．実務に携わる人にとって，研究の進んでいる様々な問題と，それらに対する有効な解法を知っておくことは重要であろう．なお，各問題毎に難しさや有効な解法が異なる場合があることに注意していただきたい．次に，長方形詰込み問題に対する様々な解法を紹介する．その歴史の長さ，実用面での重要性，問題理解の容易さと問題解決の困難さといった要因から，これまでに多種多様な解法が提案されている．本稿では，紙数の都合（と筆者の趣味）から，組合せ的な近似解法に重点をおいた紹介となるが，興味を持たれた方は他の文献（例えばDyckhoff[6]，Hopper[7]，Lodi[12]）も参照いただきたい．

いまほり　しんじ
東京大学 大学院情報理工学系研究科
〒113-8656 文京区本郷 7-3-1
うめたに　しゅんじ
豊田工業大学 大学院工学研究科
〒468-8511 名古屋市天白区久方 2-12-1

2. 長方形詰込み問題とは

この節では，「長方形詰込み問題とは？」と題して，長方形詰込み問題の特徴，この問題の様々なバリエーションについて概観することにしよう．

まず，標準的な長方形詰込み問題について述べる．入力として，幅 W，高さ H という大きさを持つ長方形（母材）が一つと，長方形（製品）集合 $I=\{1,2,\cdots,n\}$ が与えられ，各長方形 $i\in I$ に対し，幅 w_i と高さ h_i が与えられる．このとき，次に述べる二つの制約条件を満たすように，各長方形 i（の左下隅）の座標 (x_i,y_i) を決定する．ただし，ここでは長方形の回転は許されないものとする（図1参照）．

［条件1］ 長方形 $i\in I$ は母材上に配置される．

この制約条件は長方形 $i\in I$ に対して，次の二つの不等式（母材に対する横，縦方向の制約に相当）がともに成立することと等価である．

$$0\le x_i\le W-w_i, \tag{1}$$
$$0\le y_i\le H-h_i. \tag{2}$$

［条件2］ 長方形対 $i,j\in I$ は互いに重ならない．

この制約条件は長方形対 $i,j\in I$ に対して，次の四つの不等式のうち**一つ以上**が成立することと等価である．

$$x_i+w_i\le x_j, \tag{3}$$
$$x_j+w_j\le x_i, \tag{4}$$
$$y_i+h_i\le y_j, \tag{5}$$
$$y_j+h_j\le y_i. \tag{6}$$

式(3)は，長方形 i が長方形 j の左にある（正確に

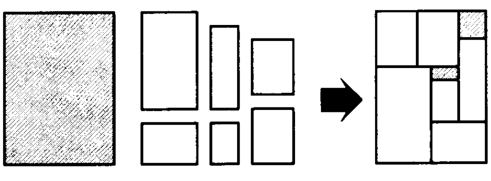

図1　長方形詰込み問題の例

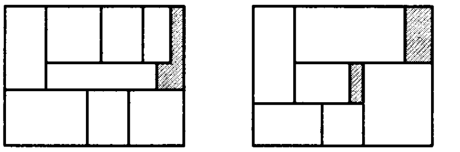

図2　ギロチンカット（左）とそうでない例（右）

書くと，i の右辺の x 座標が j の左辺の x 座標以下である）ということを表している．同様に，式(4)，(5)，(6)は，i が j の右，下，上にあることをそれぞれ表す．

この決定問題が「難しそう」であることに異論を挟む読者は少ないと思う（実際，他のNP完全問題をこの問題に帰着することは容易である）が，NP完全であることには若干の説明が必要かもしれない．この問題の難しさは，制約条件2の「四つの不等式のうち一つ以上が成立する」に由来することに注目すると，各長方形対に対して式(3)から(6)のどれを採用するかを定めると（単純に見積もると $4^{n(n-1)/2}$ 通りの可能性がある）線形計画問題になるという方針によって，この問題がNPに属することを示すことができる．

では次に，長方形詰込み問題で頻繁に考えられる二つの付加条件について考察しよう．一つ目は，長方形（製品）の回転であり，よく考えられるものに，回転なし/90°回転/自由回転というバリエーションがある．方向のある素材（木材や布地など）を扱う産業では，製品の回転は許されないであろうし，機械の制限から90°回転のみが許されるという状況も多い．その一方で，自由回転を許すことよって，高価な素材を無駄なく利用することができる場合や，初等幾何学の興味深い問題になるということもある．幾何学やパズルの好きな方は，ぜひ文献[1，5]を参照いただきたい．

二つ目は，母材の切り方（製品の詰込み方）に関する制約で，一般にギロチンカットと呼ばれる制約である（図2参照）．途中で曲がることや止まることのできないカッターを使って素材を切る場合，母材の端から端まで直線的に切断することのみが許され，例えば図2右のような配置は実現不可能となる．次節で紹介する解法のうちのいくつかは，ギロチンカット制約を満たした配置を出力する．

さて，はじめに紹介した問題は決定問題（すべての製品を定形の母材に詰込むことができるか否か）であったが，実際には設定を少し変更した最適化問題を考える方が有用であろう．次に，いくつかの代表的な長方形詰込み問題（最適化バージョン）を紹介する．

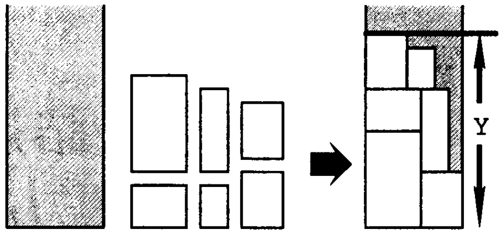

図3　ストリップパッキング問題

2次元ナップサック問題　各長方形 $i \in I$ に対し幅 w_i と高さ h_i の他に利得 c_i が与えられる．長方形集合 I から**いくつかの長方形を選択**するとき，それらの利得の総和最大化が目的であり，選択した長方形を重なりなく母材上に配置することが制約条件となる．特殊な状況として，隙間をなるべく小さくする($c_i = w_i h_i$)，できる限り多くの数の長方形を詰込む($c_i = 1$)といった問題を考えることもできる．

2次元ビンパッキング問題　長方形集合 I，各長方形 i の幅 w_i と高さ h_i，および幅 W，高さ H という大きさの母材が**複数**与えられる．目的は，なるべく少ない数の母材に全製品を詰込むことである．この問題は，ビンパッキング問題の素直な拡張であり，文献[11]では，この問題に対する様々な解法を提案している．

ストリップパッキング問題　長方形集合 I と幅 W（固定），**高さ Y（可変）**という大きさを持つ母材が一つ与えられる．すべての長方形を母材上に重なりなく詰込むという制約条件のもとで，母材の高さ Y を最小化する問題を考える（図3および次の定式化を参照）．

最小化　Y　(7)

条　件　$0 \le x_i \le W - w_i \quad (i=1, \cdots, n)$,　(8)

$0 \le y_i \le Y - h_i \quad (i=1, \cdots, n)$,　(9)

長方形は互いに重ならない．　(10)

この問題は，長方形詰込み問題の中で最も研究のすすんだ問題の一つであり[2〜4，7]，節3.1では，この問題に対する解法を中心に紹介する．

面積最小化問題　母材の大きさを**幅 X，高さ Y（ともに可変）**として，母材の面積 XY を最小化する（次の定式化を参照）．

最小化　XY　(11)

条　件　$0 \le x_i \le X - w_i \quad (i=1, \cdots, n)$,　(12)

$0 \le y_i \le Y - h_i \quad (i=1, \cdots, n)$,　(13)

長方形は互いに重ならない．　(14)

目的関数が2次となるため（一般的には）扱いがやや

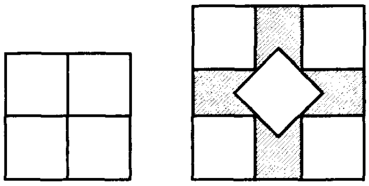

図4　正方形詰込み問題(k=4, 5)の最適解

面倒であるが，各長方形対の相対的な位置関係（式(3)から(6)のどれを選択するか）が定まると，x 軸方向と y 軸方向に分離し，独立に扱うことができるという特徴を持つ．文献[15, 16]は，この問題に対するアニーリング法に基づく近似解法を提案している．

2次元カッティングストック問題　本シリーズ1回目に解説した，カッティングストック問題を2次元に拡張した問題で，前述の2次元ビンパッキング問題を一般化した問題である．入力として，各 $i \in I$ に対し，幅 w_i と高さ h_i の他に注文数 d_i が与えられ（つまり，**同じ形状の製品が複数ある**），全製品を固定の幅と高さを持つ母材に詰込むときの，母材利用数最小化が目的である．

上述の代表的な問題と比べると単純で特殊ではあるが，数学的に興味深い詰込み問題を最後に二つ紹介しておく．

正方形詰込み問題　1辺の長さ1の正方形が k 個与えられる．これらをなるべく小さい正方形の母材上に詰込む問題を考える．回転なしの場合は簡単（母材の1辺の長さは $\lceil\sqrt{k}\,\rceil$）であるが，自由回転を許す場合は難しい．図4は k=4, 5 の最適解であるが，例えば k=6, 10, 11 ではどうなるだろう？

パレットローディング問題　幅 W，高さ H という大きさを持つ母材が一つと，幅 w，高さ h という同一の大きさを持つ製品が複数与えられる．製品が互いに重ならない，90°回転のみ許されるという条件のもと，母材上に配置することのできる製品の最大数を考える問題である．この問題の特徴として，入力ビット長が短い（$O(\log WHwh)$）こと，問題の難しさ（NP困難か？　NPに属するか？）が明らかになっていないことの2点が挙げられる．

3．実用的な解法の紹介

前節では，長方形詰込み問題の様々なバリエーションを紹介してきた．これらの問題の多くはNP困難であり，実用的な規模の例題に対して厳密な最適解を望むことは難しい．そこで本節では，いくつかの近似解法について解説したいと思う．ただし，コンピュータの進歩とアルゴリズムの改良により，比較的大きな規模の例題であっても厳密な最適解が求まる場合もある．興味のある方は，文献[10, 13, 14]を参照してほしい．

3.1　一つずつ詰込む手法

もしあなたが，図3のような母材と製品集合（ただし製品数はもう少し多い）を与えられ，高さ Y がなるべく小さくなるように長方形を配置せよ，という問題を与えられたらどうするだろうか[1]．各長方形を手に取り，その座標をおもむろに言い当てる，という方法で良い解を見つける（天才的な才能を持った）人も，もしかするといるかもしれない．しかし，この方法（座標を直接決定）では，長方形間の重なりや微妙な隙間の排除が困難であり，一般的に良質の解を得ることは難しいとされている．

ある（勉強熱心な）人は，1次元の詰込み問題に対する近似解法を知っていて，それを応用することで問題解決を図るだろう．文献[4]では，ビンパッキング問題に対するいくつかの有力な近似解法（next-fit 法，first-fit 法など）を元にした解法を提案し，近似度の理論的な解析を行っている（ここでは，ビンパッキング問題に対する解法の説明は省略する）．図5は，これらの解法で，1から6という長方形が番号順に詰込まれた様子を表しており，1や3（および(a)の5）という長方形がレベル（各レベルでは，長方形が左詰め，横一列にならぶ）を規定している．これらの解法は，next-fit (first-fit, best-fit) 法で高さの降順 (decreasing-height) に詰込むことから，NFDH (FFDH, BFDH) 法と呼ばれており，手続きの単純さ，解析の容易さなどの優れた点がある．例えば NFDH 法の場合，製品数を n とすると，高さ順に並べ替えるために $O(n \log n)$ 時間を要するが，実際に

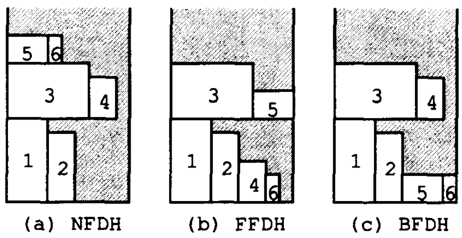

図5　レベルアルゴリズムの例

[1] 筆者らは，製品数9という小規模な例題を木製のパズルとして作成し，まわりの人に出題した．15分から30分が平均的な解答時間で，途中で投げ出す人や3分で解いてしまう人もいた．

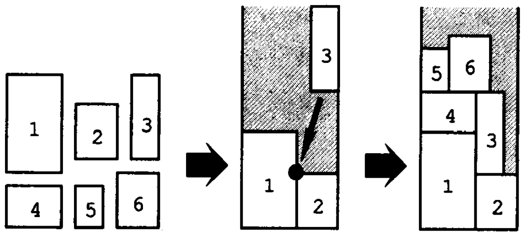

図6　BL 法の動作の一例

詰込む部分は線形時間で実現可能である．また，この解法で得られる解は，必ず最適解の高さの3倍（正確には，2倍$+\max_i h_i$）以内という保証もある．しかし一方で，各レベルの右上の部分に無駄領域が生じやすく，実用面を考えるとこのままでは使いものにならないという欠点もある．文献[11]は，この無駄部分を有効活用することで，実用的にも精度の高い解法を提案している．

また別の人は，「難しいことを考えずに，下の方から順番に詰込む」という手法を採用するかもしれない．少し単純すぎるように思うかもしれないが，このタイプの手法もよく研究されており，数値実験から実用上の性能が高いとされている．文献[2]で提案されている手法はBL法（bottom left algorithm）と呼ばれ，はじめに長方形に番号をつけ（図6では1から6），この順に従って，なるべく下，同じ高さであればできる限り左に詰込むということを繰り返す．この解法の計算時間は$O(n^3)$，解の精度は最適解の3倍以内というのが最悪の場合の見積もりであるが，多くの例題に対しては，$O(n^2)$の計算時間で最適解から20%以内の解を出力する．また，この手法では，長方形の番号付けが解の良し悪しを決定するが，面積の大きい順といった簡単な基準や，メタ戦略を用いてよい番号付けを探索することで，より精度の高い解を見つけることができる[7]．

ここまでに紹介した解法では，詰込み前にあらかじめ長方形に番号を付け，この番号順に長方形を配置するという戦略をとってきた．その一方で，文献[3]では，順番を決めない詰込み戦略が提案されている．この解法は，なるべく隙間を作らないような長方形を，順次選択・配置していくという欲張り法で，大規模な例題に対しても実用的な時間でアルゴリズムを実行することができる．また，数値実験に基づく性能評価では，多くの例題に対して，非常に良質な近似解を発見できることが明らかになっている．

3.2　相対位置に基づく手法

次は，長方形間の相対位置を初めに決定するタイプの手法を紹介しよう．前節でも述べたが，長方形詰込み問題の難しさは，各長方形対ごとに式(3)から(6)のいずれかが成立するという部分にある．ここで紹介する解法では，どの不等式を成立させるかをまず決定し，それに基づいて座標を決定することを試みる．

このタイプでもっとも素朴な方法は，各長方形対ごとに独立に不等式を選択した後，線形計画問題を解くことで座標を決定する手法であろう．不等式の選び方は$4^{n(n-1)/2}$通りあり，この中には最適解に対応する不等式の選び方も含まれている．つまり，運がよければこの方法で最適解を得ることができる．しかし，この方法にはいくつかの欠点があり，実際には有効ではない．その理由の一つは，$4^{n(n-1)/2}$という候補数は非常に多く，最適な組合せを見つける確率は限りなく0に近いということ．そして，各長方形の座標を計算するために，制約式の数が$O(n^2)$の線形計画問題を解く必要があること．最後に致命的な欠点として，不等式の組合せの中には実現不可能なものが多く含まれている，ということが挙げられる．例えば，三つの長方形a, b, cがあり，これらの間に「aはbの左」，「bはcの左」，「cはaの左」という不等式が選ばれたとすると，これらを配置できないことは明らかであろう．

これらの欠点を改善した手法がいくつか提案されているので，ここではその中から二つの手法を紹介する．一つ目は，文献[17]が提案している手法で，2分木を利用して長方形間の不等式の割当を決定する方法である．まず，図7にあるような，葉の数がnの2分木を準備する．各葉は長方形（製品）に対応し，内部節点には位置関係を表すラベルが入る．長方形間の位置関係は，その共通の祖先で最も深い内部節点のラベルによって決まる．ここで，hは水平方向のカットで長方形対が切り分けられることを表し，vは垂直方向のカットを表すラベルである．例えば，図7の長方形3と5の場合，‘hラベル’の節点の左の子孫として5が，右の子孫として3があり，このとき5を3の下に配置することにする．この規則によって，一つの2分木か

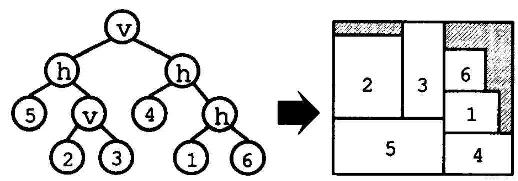

図7　2分木を用いた解表現

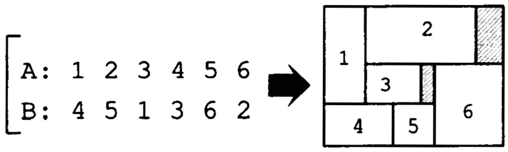

図8 順列対を用いた解表現

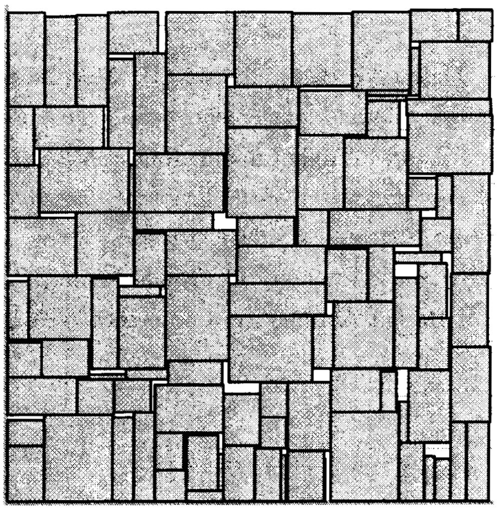

図9 面積最小化問題の近似解（長方形数 100）

ら全長方形間の制約条件が決定する．この手法（解表現方法）には重要な特徴が三つある．まず，この2分木によって定まる制約条件によって，矛盾なく，互いに重ならないように長方形を配置できる．次に，長方形の数の線形時間で座標を決定することができる（$O(n^2)$ もの制約式を陽に扱う必要がない）．そして，このルールにより定まる配置は，常にギロチンカット制約を満たす．例えば，図7の根（v ラベルを持つ）に注目すると，左の子孫 {2, 3, 5} と右の子孫 {1, 4, 6} は，垂直方向のカットによって切り分けることができる．

次に，あらゆる配置を表現することができる手法から，順列対表現[15]を紹介しよう．この解表現方法では，図8のように長方形の順列を二つ準備し，各長方形間の制約条件（式(3)から(6)の4種類から選択）を，この順列対における位置関係を利用して定める．例えば，長方形1が両方の順列において長方形2より前にある場合，1を2の左に置く，などである．この手法の特徴として，矛盾のあるような制約条件は生じさせないことと，任意の配置に対応する相対位置関係を表現できることがある．計算効率に関しては，先に紹介した2分木を用いる方法と比べると劣るものの，文献[8, 9]などで効率的な計算方法が提案されており，実用上十分精度の高い解法であると言える．図9に，面積最小化問題に対して，文献[9]で提案されている局所探索法によって得られた配置を示す（長方形数 100，充填率 96%，計算時間 7 秒）．

4. おわりに

本稿では，長方形詰込み問題の紹介と，様々な解法についての解説を行ってきた．紙数の都合上，詳細までは立ち入らない部分も多かったが，興味を持たれた方は，ぜひ参考文献も手にとっていただきたい．

このシリーズの最終回となる3回目は，多角形詰込み問題についての解説を行う．この問題も，とても重要かつ難しい問題であり，読者に興味を持ってもらえるものと確信している．

謝辞 本稿の執筆にあたって貴重なコメントをいただいた柳浦睦憲博士に感謝します．

参考文献

[1] 秋山 仁, R. L. Graham：「離散数学入門」, 朝倉書店 (1993)

[2] B. S. Baker, E. G. Coffman Jr. and R. L. Rivest: "Orthogonal packing in two dimensions," *SIAM Journal on Computing*, 9 (1980), 846-855

[3] E. K. Burke, G. Kendall and G. Whitwell: "A new placement heuristic for the orthogonal stock-cutting problem," *Operations Research*, 52 (2004), 655-671

[4] E. G. Coffman Jr., M. R. Garey, D. S. Johnson and R. E. Tarjan: "Performance bounds for level-oriented two-dimensional packing algorithms," *SIAM Journal on Computing*, 9 (1980), 801-826

[5] H. T. Croft, K. J. Falconer and R. K. Guy（著）, 秋山 仁（訳）：「幾何学における未解決問題集」, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1996)

[6] H. Dyckhoff: "A typology of cutting and packing problems," *European Journal of Operational Research*, 44 (1990), 145-159

[7] E. Hopper and B. C. H. Turton: "A review of the application of meta-heuristic algorithms to 2 D strip packing problems," *Artificial Intelligence Review*, 16 (2001), 257-300

[8] S. Imahori, M. Yagiura and T. Ibaraki: "Local search algorithms for the rectangle packing problem with general spatial costs," *Mathematical Programming*, 97 (2003), 543-569

[9] S. Imahori, M. Yagiura and T. Ibaraki: "Improved local search algorithms for the rectangle packing

problem with general spatial costs," *European Journal of Operational Research*, 167 (2005), 48-67.

[10] N. Lesh, J. Marks, A. McMahon and M. Mitzenmacher: "Exhaustive approaches to 2D rectangular perfect packings," *Information Processing Letters*, 90 (2004), 7-14

[11] A. Lodi, S. Martello and D. Vigo: "Heuristic and metaheuristic approaches for a class of two-dimensional bin packing problems," *INFORMS Journal on Computing*, 11 (1999), 345-357

[12] A. Lodi, S. Martello and D. Vigo: "Recent advances on two-dimensional bin packing problems," *Discrete Applied Mathematics*, 123 (2002), 379-396

[13] S. Martello, M. Monaci and D. Vigo: "An exact approach to the strip-packing problem, *IN-INFORMS Journal on Computing*, 15 (2003), 310-319

[14] S. Martello and D. Vigo: "Exact solution of the two-dimensional finite bin packing problem," *Management Science*, 44 (1998), 388-399

[15] H. Murata, K. Fujiyoshi, S. Nakatake and Y. Kajitani: "VLSI module placement based on rectangle-packing by the sequence-pair," *IEEE Transactions on Computer Aided Design*, 15-12 (1996), 1518-1524.

[16] S. Nakatake, K. Fujiyoshi, H. Murata and Y. Kajitani: "Module placement based on the BSG-structure and IC layout applications," *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 17 (1998), 519-530

[17] R. Otten: "Automatic floorplan design," Proceedings of Design Automation Conference, (1982), 261-267