

# 見せるOR教材

逆瀬川浩孝（早稲田大学）

## 1 「高校生のためのOR」研究部会

このシンポジウムで筆者がスピーカーに指名されたのは、昨年7月に筆者が行った高校生を対象とした実験的授業の様子を学会の機関誌の記事にまとめたもの[1]が主催者の目にとまったからでした。まず、そのいきさつから説明することにしましょう。

3年前の学会研究発表会で、若い層の教育に比較的高関心の高い人たちが集まって「高校生のためのOR」という名前を持った研究部会が発足しました。理工学部、あるいは経営工学関連の学科への志願者が減り始めたことへの危機感も手伝って、今のうちに高校生へ、なんらかの働きかけが必要である、ということについて意見が一致しました。研究部会の名前は「高校生のためのOR」ですが、高校生にオペレーションズリサーチを教えるというよりは、数理的な考え方を社会現象に適用して問題を解決している、ということを経験することを目標に置きました。そうすることによって、数学が受験だけのための道具ではないということに気付かせ、数理的な考え方に興味を持ってもらうことが目的でした。

部会では内外の現状や動向を調査したり、外部から講師を招いて話を聞いたりする一方で、部会としても「これならば高校生にも分かってもらえる」といえるような例題を集めた教材作りをしよう、ということになりました。メンバーがそれぞれ得意な分野での問題を作り、それを持ち寄って検討するということから始めましたが（それらの結果が機関誌の特集号に掲載されています[4],[5]）、会合を重ねて行くうちに、本当に「高校生にも分かってもらえる」ものになっているかどうかは気になってきました。

たまたま部会のメンバーに和歌山県の高校の先生が入っていたので、とりあえず、高校の数学科の先生方との意見交換の場を設定しました。部会には高校の数学の教科書作りに深く関わっているメンバーも含まれていたため、現状についてある程度予備知識を持って臨んだのですが、現場で日々実践されている先生方の経験談はまことに貴重なもので、認識を新たにさせら

れたことが多々ありました。一方、「高校生のためのOR」部会がめざすところに対して高校の先生方は少なからぬ関心を持たれた様子でした。そして、機会は提供できるので高校生に直接教えて見本を示してほしいという要望が出されました。部会としても、「高校生にも分かってもらえる」ように作成した教材が本当に分かってもらえるのか確かめることができるチャンス到来、というわけで「出前授業」が実現しました。

## 2 出前授業

最初は法政大学の若山邦紘氏がシミュレーション教材を出前されました。釣り銭の用意という身近な問題でシミュレーションと確率過程モデルを分かりやすくまとめた教材は、高校生にも理解できるものでした[2]。日頃の学校の授業ではほとんど意識されていない数学と社会現象との結びつきに気付かせるには格好の教材だったようです。部会で作成した教材が生徒に十分に受け入れられたこと、生徒は講師が期待した以上に反応し、刺激を受けたこと、などを直接確かめることができたことは大きな成果でした。

2回目は東京工業大学の高橋幸雄氏でしたが、彼は高校生にとって身近な大学入試問題やパズルを例にとり、数理的な考え方の柔軟性、有効性ということについて話をされました。ここでもやはり、日頃の授業では出てこない発想法に対して新鮮な驚きを感じられ、生徒には大きな刺激になったようでした。

そして3回目が筆者の出前でした。高校の先生方との意見交換で感じたことは、もしこれから高校生向けにこのような話をして行こうというのであれば、実際に教える立場の高校の先生が教えやすい教材にする必要があるということでした。その方策として考えたのは、高校の教材の理解を助けるような例、このようなことが実際に使われているのだから勉強しないとダメだと言える例、を提示するということでした。具体的に取り上げたのは「確率」で、その例はランダム回答法というトリッキーな統計調査法でした。また、授業の実施にあたって考えたことは、生徒に聞かせるだけ

でなく、参加型の授業にすること、パソコンを使って動く教材を用意すること、の2点です。最初の点は実際にクラスで調査を実施すること、2番目の点は乱数を使ったシミュレーションを見せること、によって実現しました。実際に使われた教材の一部をこのあとに掲載しておきます。

### 3 見せる教材

オペレーションズリサーチに限ったことではありませんが、ものを人に教える場合には良い教材が必要です。特に対象が初学者の場合は例題を使い、図解をしながら問題や解法を理解させることが必要です。機関誌でも10年前に「ORの図解」という特集号がありました。

ところで、最近ではパソコンが普及するとともに性能もますます高くなり、EXCELやMathematicaを使えば相当の計算が手許でできるようになっています。特にEXCELはほとんどのパソコンで利用可能ですから、これを使わない手はありません。EXCELはもともと「what-if分析」と言われるように、もしこれこれだとしたらどうなるか、という架空のシナリオを想定して将来像を計算する、すなわちシミュレーションをする道具として開発されました。この考え方は数理モデルを理解する上でも非常に有効です。

今回取り上げた題材のランダム回答法は、さいころを用いた標本調査で、理屈としては納得できても、実際の調査結果がどの程度信用できるのか知りたいところです。そのためには繰り返し調査してそのばらつきを調べる必要がありますが、実際にそんなに何回も調査を繰り返すことはできません。実際の授業では幸いパソコンが使えたので、EXCELの乱数を利用して、調査のシミュレーションを体験してもらいました。乱数を使うことによってパソコンにさいころ振りをさせることができる、ということを実験させた上で信用のおける架空の調査を繰り返し、どのような結果が起きるかを実験しました。また、さいころが歪んでいた場合に、結果がどのように変わるのか、回答する人の数が増えると結果はどうなるのか、というようなこともシミュレーションで計算できます。

このように、パソコンを使ってシミュレーションを繰り返したり、パラメータの値をいろいろ動かしながら実験をすることが容易にできますから、何が問題の本質なのかということを直感的に理解させることが可

能です。理屈を教える場合でも、このような体験を味わっているか否かで理解に差が出てきます。

オペレーションズリサーチの人口を増やすためにも、初学者に対して教育効果が見られるこのようなシミュレーションを導入した教材を開発・普及させて行くことが期待されます。

### 4 教材の例

以下は筆者が昨年7月に高校3年生のために行った授業のテキストの一部です。

#### (1) はじめに (略)

#### (2) アンケート調査

...さて、あなたがアンケートに答えることになったとき、どんな質問でも正直に答えることができますか。たとえば

「あなたはたばこを吸ったことがありますか」とか

「あなたはいじめにあったことがありますか」と聞かれても、全員が正直に答えてくれるとは思えません。他の人に答えを知られたくない、という質問があったら、答えないか、うそを答えてしまいますね。それでは何のために調査しているのか分からなくなってしまう。アンケートは一人一人の答えを知るのが目的ではなく、集団としてどのような意見が多いかを調べるものです。一人一人の答えは調査した人には分からないけれど、全体の意見は正確に把握することができる、というような都合の良い調査のやり方はないのでしょうか。

あまり切実な問題を例に出すと、注意がそちらに集中してしまい、肝心なことが見えなくなってしまう恐れがありますので、ここでは

「あなたは、今恋人がいますか？」

という質問を例として取り上げることにしましょう。このクラスの中に恋人がいる生徒のパーセンテージを調べようというのが目的です(別にこんな事が分かってはどうということはありませんが)。

さて、この目的のためには、クラスの1人1人に上の質問に答えてもらう必要がありますね。その調査で

「はい」と答えた人の数を全体の人数で割れば恋人を持っている人の割合が計算できます。しかし、その調査結果は信用できるものでしょうか。上のように聞かれて正直に答えてくれる人はどれくらいいるのでしょうか。

もしも

「あなたは、今恋人がいますか？」

「あなたは、今恋人はいませんか？」

という2つの質問のどちらかをでたらめに選んで、どちらの質問を選んだかは言わずに、その質問に答えてください、というように聞かれたらどうでしょう。質問の答えは「はい」か「いいえ」です。調査した人はその2つの答えのどちらかを知るだけです。

「はい」と答えた人は

上の質問に答えて「はい（恋人がいます）」なのか、下の質問に答えて「はい（恋人はいませんか）」なのか分かりません。つまり、答えを聞いただけでは、答える人が恋人を持っているかどうかを知ることはできません。プライバシーが守られているわけですから、直接質問した場合よりは正直に答えようとする人の割合が増えることで期待できます。このようなアンケート法をランダム回答法といいます。

「2つの質問をでたらめに選ぶ」と書きましたが、本当にでたらめに選んでいるのか、それともどうでも良いから勝手に選んだのか、見極めることはむづかしいので、たとえばトランプ52枚を良くきって1枚だけ選んだとき、それがハートならば上の質問、さもなければ下の質問に答える、というようにしてもらうことにします。トランプがなければさいころでも良いでしょう。以上の説明から、実際の調査の仕方をまとめてみたのが次の質問です。

ここに1組のトランプがあります。

良く切ってから私に見えないようにして1枚だけ取り出してください。

・もしそれがハートのカードならば、

次の質問に「はい」か「いいえ」で答えてください。

「あなたは、今恋人がいますか？」

・もしそれがハート以外のカードならば、

次の質問に「はい」か「いいえ」で答えてください。

「あなたは、今恋人はいませんか？」

自分がこの調査に答えなければいけないとしたとき、「はい」と答えても「いいえ」と答えても、自分が恋人を持っているか持っていないかを調査員に知られることはない、ということが納得できますか。

全員が納得できたところで、それでは実際に調査してみましょう（といって調査を実施しました）。

### (3) ランダム回答法の理屈

今この教室にいるのは\_\_人です。「はい」と答えた人は\_\_人でした。さて恋人を持っている人は何人いるでしょう。「はい」といっても恋人がいるのかいないのか分かりません。両方のケースが混ざっているのです。こんなあいまいな調査をして、その数字から何か分かることがあるのでしょうか。

もし恋人を持っている人は全体の40%と分かっているとすれば、「はい」という答えのおおよその数を見積もることができます。計算を簡単にするために、クラスに100人いるとしましょう。そうすると、恋人がいるのは40人です。「はい」と答えるのはそのうちのハートのカードを選んだ人です。ハートが選ばれる確率はだいたい4分の1と言って良いでしょう。したがって、40人の4分の1、10人が「はい」と答えるはずです。

一方恋人を持っていない生徒が「はい」と答えるためにはハート以外のカードを引く必要があります。その確率はだいたい4分の3と言って良いでしょう。したがって60人の4分の3、45人が「はい」と答えると考えて良いでしょう。

結局、「はい」と答える人はおおよそ $10+45=55$ 人いることになります。つまり全体の55%が「はい」と答えることになります。もし恋人を持っている人が全体の20%しかいないクラスで調査した場合は全体の65%が「はい」と答えることも計算できます。

この2通りの計算結果

40%ならば、「はい」の割合が55%

20%ならば、「はい」の割合が65%

は何を意味しているのでしょうか。今は恋人を持っている生徒の割合を決めてから「はい」と答える人の割合を求めましたが、逆に「はい」の割合が分かっているとき、恋人を持っている生徒の割合を求めることができるのでしょうか。上の計算からすると、「はい」の割合が60%のときは恋人を持っている生徒の割合は

30%になりそうですが、それでよいのでしょうか。

そのとおりです。「はい」の数が分かると、おおよそその恋人を持っている生徒の割合が計算できるのです。100人中  $r$  人が恋人を持っているクラスでこの調査を実施したとき60人の生徒が「はい」と答えたとしましょう。上の計算のように、恋人を持っている  $r$  人のうち、だいたい4分の1が「はい」と答えるでしょう。一方、恋人を持っていない人のうち、大体4分の3の生徒が「はい」と答えるはずで、結局、「はい」と答えた60人の生徒は2通りのいずれかですから、

$$60 = \frac{1}{4} \times r + \frac{3}{4} \times (100 - r)$$

という等式が成り立ちます。これは  $r$  に関する1次式ですから、解くことができます

$$r = 30$$

となりました。

一般に、「あなたは、今恋人がいますか？」という質問に答える確率を  $p$  としてみましょう。トランプの場合は  $p=0.25$  です。調査対象者を  $N$  人とし、 $m$  人が「はい」と答えたものとしますと、上の式を参考にして次の式を導くことができます。

$$m = p \times r + (1 - p) \times (N - r)$$
$$\Leftrightarrow \frac{r}{N} = \frac{1 - p - m/N}{1 - 2p}$$

上で求めたを計算する式

$$\frac{1 - p - m/N}{1 - 2p}$$

を、恋人を持っている生徒の比率の推定値、と言います。この推定値を使えばどんな調査結果からもちどころに恋人を持っている生徒の割合を求めることができます。

#### (4) ランダム回答法の信頼性

##### - コンピュータシミュレーション

ちゃんと質問に答えた人は誰もいないのに、全体の比率が分かってしまうというのは、式で説明されても、なんとなく釈然としない、という人が多いのではないのでしょうか。結果は本当に正しいのでしょうか。もし調査をやり直したとしたらどうなるのでしょうか。普通の調査ならば、調査される人が良い加減な答えかたを

しない限り、何回調査をしても同じ結果が返ってきます。しかし、ランダム回答法の場合は違います。

やり直しの調査で選ぶカードは1回目の調査と同じであるという保証はありません。それどころか1回目でハートを選んだ人のうち平均的には4分の3は2回目ではハート以外のカードを選びますから、当然「はい」と答える人の顔ぶれが違ってきますし、「はい」の回答数も違ってきます。

このクラスでもちょっと試してみましよう（といって2回目の調査を実施しました）。

2回くらいでは様子が良く分かりません。でも、こんなことを何回も繰り返すのはちょっと苦痛です。コンピュータを使って計算できないかしら。

コンピュータにトランプを渡しても何もできませんから、それに変わる何かを考えなければいけません。たいていのコンピュータにはEXCELという計算に便利なソフトが付いていますのでそれを動かしてみましよう。

A1からA4までのセルに「=rand()」と入力してみてください。そうすると、各セルにたとえば0.12308のように1より小さい数が表示されるはずで、4つのセルの数字は一見でたらめですね。キーボードの上の方にあるF9というキー（再計算キーとも言います）を押してみてください。こうすると3つのセルの内容が変わります。F9を何回か押して、表示される数字のルールを見つけ、次にF9を押したら何が表示されるか当ててみてください。

多分、当たった人はいないでしょう。F9を押して次々と表示される数字に何の規則性も見出すことはできません。このようにでたらめに出てくる数字を乱数と呼んでいます。乱数を使えばトランプから1枚取り出すという実験を、トランプを使わずに実行することができます。

=rand()は0から1の間のでたらめな数を計算するEXCELの関数です。0.25より小さい数が表示される確率は4分の1と考えられますから、

もし「rand() < 0.25」ならば「ハート」、さもなければ「それ以外」

という指示をコンピュータに与えることができれば、コンピュータがトランプから1枚取り出して、それが何であったかを自分で判定することができた、ということになりませんか。

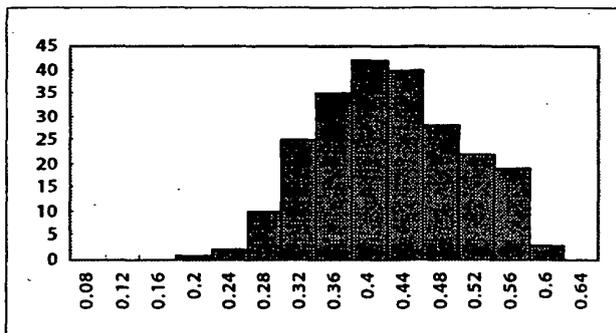
そこでセルB1に

「=if(A1 < 0.25, "ハート", "それ以外")」

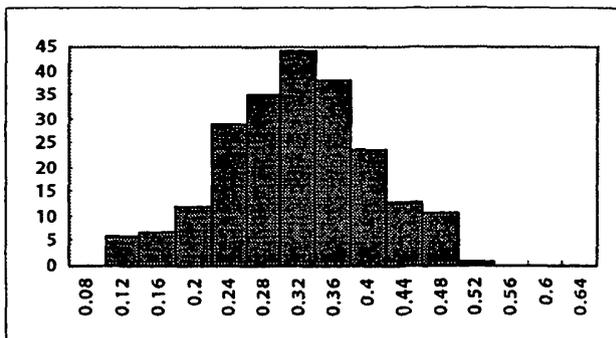
と入力して、それを B2 から B4 までコピーください。B 列の表示が A 列の乱数の大きさによって異なっていることが分かりますね。これは 4 人の人がカードを取り出したとしたらどうなるかということをコンピュータが「計算した」ことになりませんか。前と同じように F9 キーを何回か押すと、全体の 4 分の 1 くらいは「ハート」と表示されること、しかし毎回どれかちょうど 1 つのセルに「ハート」と表示されるわけではない、ということが分かります。つまり平均的に 4 分の 1 がハートといっても 1 回の実験で（調査で）必ず 4 分の 1 の人がハートを選ぶわけではないのです。

このようなやり方で、ランダム回答法の調査をコンピュータに代行させることができます。

次のヒストグラムは、100 人中 40 人が恋人を持っているクラスで調査を 200 回繰り返した場合の結果です。正しい比率は 0.4 ですが、かなりばらついていることが分かります。しかし 0.2 より小さくなったり、0.6 より大きくなったり、極端に違うことはほとんどない、ということが分かります。



次の図は恋人を持っている人が 30 人のクラスでの実験結果です。



同じようにばらついています、今度はヒストグラムの中心が正しい比率の 0.3 になっています。

問題は、もしこの方法で調査するとしたら、1 回し

か調査できないことです。ですから、推定された比率がたとえば 0.3 であったとすると、本当の比率は 0.4 かもしれないし、0.3、あるいは 0.2 かもしれない、実際のところは分からない、ということになります。本当は比率が 0.4 であるのに、推定された比率は 0.55 ということも有り得るわけです。しかし、0.6 とか 0.2 とかになることはないということは言えるわけで、大雑把に全体の様子をつかむことがある程度可能であるといえます。

このように、何が起きるか分からない状況をコンピュータで「計算」させて必要な情報を得る方法をシミュレーションと言います。上の例のように、実際には 1 回しか調査しない場合でも、同じ状況で調査をやり直したとすればどのような回答が得られる可能性が高いか、状況が変わったら結果がどれくらい変わるものなのか、などというように実際には実現不可能なことを調べるために、コンピュータが有効に使われています。また、確率がからむ場合は上のランダム回答法のように答えを聞いても黙然としない、というような問題がありますから、そのような場合は実際に乱数を使って実験をすることによって納得してもらったり、実際にどのようなことが起きるのかを実感してもらうためにもシミュレーションが使われます。EXCEL の rand() 関数を使って何でも良いからシミュレーション実験を考えてみてください。

#### 参考文献

- [1] 逆瀬川浩孝「でたらめのお話し」『オペレーションズリサーチ』42.12, 762-766 (1997)。
- [2] 若山邦紘「クラス会の釣り銭の問題」『オペレーションズリサーチ』42.12, 757-761 (1997)。
- [3] 特集「OR の図解」『オペレーションズリサーチ』32.6, 300-403 (1987)。
- [4] 特集「高校性のための OR」『オペレーションズリサーチ』41.3, 140-179 (1996)。
- [5] 特集「高校性のための OR (2)」『オペレーションズリサーチ』42.12, 756-784 (1997)。