日本オペレーションズ・リサーチ学会
2019年 春季研究発表会

複数種捜索資源の同時使用のある情報不完備捜索ゲーム

01504810　防衛大学校　宝崎 隆祐　HOHZAKI Ryusuke

1. はじめに

搜索者と目標がプレイヤーである捜索に関する情報不完備ゲームの研究は，捜索開始時における目標の初期位置と初期移動エネルギーに関する目標の個人情報や，捜索資源の探知能力に関する捜索者の個人情報を考慮したモデル [1–3] が考えられてきたが，捜索資源の同時使用は１種類のみとされてきた．しかし，海上や山岳での捜索救助隊は，救助活動に必要な多種類の機材や資源を携行するのが普通である．この報告では，複数種捜索資源の同時使用が考えられる典型的な２つの状況を想定した情報不完備捜索ゲームを取り扱う．

2. 複数種捜索資源の組合せが個人情報であるモデル A

捜索者は捜索資源を複数種使用できるものの，その組合せ比率はコスト制約から決まる幾つかの標準的比率の１つが偶然手番により決定される状況を考える．実現した組合せ比率は捜索者の個人情報であるモデルを以下のように設定する．

A1. 捜索空間は，離散セル空間 $\boldsymbol{K}=\{1,\cdots,K\}$ と離散時間空間 $\boldsymbol{T}=\{1,\cdots,T\}$ からなる．

A2. 自然は，目標の初期位置 k を確率分布 $\{f(k), k\in K_0\subseteq\boldsymbol{K}\}$ により，初期移動エネルギー e を確率分布 $\{g(e), e\in E_0\}$ により決定する．実現した初期位置 k と初期エネルギー e は目標のみが知っており，この目標をタイプ (k,e) の目標と呼ぶ．

タイプ (k,e) の目標はその初期位置 k から捜索空間上を時間とともに移動するが，その移動には，時点 t のセル i から次時点 $t+1$ で移動可能なセル群 $N(i,t)$ や，セル i からセル j への移動におけるエネルギー $\mu(i,j)$ の消費といった制約がある．エネルギー消費を伴う移動により初期エネルギー e を使い尽くせば，目標は現在地点から移動できない．タイプ (k,e) の目標の実行可能なパス群を Ω_{ke} とし，目標はその１つを選んで移動する．パス $\omega\in\Omega_{ke}$ をとる目標の時点 $t\in\boldsymbol{T}$ での存在セルは $\omega(t)\in\boldsymbol{K}$ である．

A3. 捜索資源の種類の集合は S であり，それらの組合せ比率として可算有限個の集合 D がある．その中の１つが確率分布 $\{l(d), d\in D\}$ で偶然手番により選ばれ，捜索に使用される．実現した組合せ比率 d は捜索者に既知であり，これをタイプ d の捜索者と呼ぶ．

捜索者は，時点 τ 以降の時間区間 $\widehat{\boldsymbol{T}}=\{\tau,\tau+1,\cdots,T\}$ において，偶然手番により実現した１つの比率タイプ d の捜索資源を捜索空間内に投入して目標を探知しようとする．

比率タイプ $d\in D$ では，総捜索コストに対する各資源種類 $s\in S$ の使用コストの比率が γ_s^d で与えられている．ただし，$\sum_{s\in S}\gamma_s^d=1$ である．総捜索コストは C であり，種類 s の捜索資源の単位量使用にはコスト c_s を要するため，種類 $s\in S$ の資源の使用可能量は

$$\Phi_s^d=\frac{\gamma_s^d C}{c_S} \tag{1}$$

となる．捜索者は，この捜索資源を各時間に分割して各セルでの捜索に使用する．

A4. セル i に存在する目標に対し，種類 s の資源量 x_s 投入による目標探知確率は次式で与えられる．

$$1-\exp(-\alpha_i^s x_s) \tag{2}$$

非負のパラメータ α_i^s は，種類 s の単位資源量によるセル i での探知効率を表す．

捜索資源の複数種間での探知や複数時点間での探知は，互いに独立であるとする．

A5. 捜索者は探知確率を大きくしようとし，目標は小さくしようとする．

このゲームに対し，タイプ d の捜索者の資源配分戦略を $\varphi^d=\{\varphi_s^d(i,t), i\in\boldsymbol{K}, t\in\widehat{\boldsymbol{T}}, s\in S\}$ で表す．$\varphi_s^d(i,t)$ は時点 t でセル i に投入するタイプ s 資源の量である．また，(k,e) タイプ目標の純粋戦略は１本のパス選択 $\omega\in\Omega_{ke}$ であるが，ここではパス ω を確率 $\pi_{ke}(\omega)$ でとる混合戦略 $\pi_{ke}=\{\pi_{ke}(\omega), \omega\in\Omega_{ke}\}$ を考える．

以上の２人のプレイヤーの戦略により，ともに個人情報をもつ捜索ゲームの探知確率の期待値は，目標及び捜索者のタイプごとに多少異なった式で表されるものの，全タイプを考えれば，捜索者が最小化したい，また目標が最大化したい非探知確率（探知しない確率）の期待値 $R(\varphi,\pi)$ は次式で与えられる．

$$R(\varphi,\pi)=\sum_{k\in K_0}f(k)\sum_{e\in E_0}g(e)\sum_{\omega\in\Omega_{ke}}\pi_{ke}(\omega)$$
$$\times\sum_{d\in D}l(d)\exp\left(-\sum_{t\in\widehat{T}}\sum_{s\in S}\alpha_{\omega(t)}^s\varphi_s^d(\omega(t),t)\right) \tag{3}$$

この期待非探知確率に関するミニマックス最適化 $\min_\varphi \max_\pi R(\varphi,\pi)$ により，最適な捜索資源配分計画 φ^* を得る凸計画問題は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
P_S^A:\quad & \min_{\varphi,\eta} \sum_{k\in K_0}\sum_{e\in E_0} f(k)g(e)\eta_{ke} \\
s.t.\quad & \sum_{d\in D} l(d)\exp\left(-\sum_{t\in\widehat{T}}\sum_{s\in S}\alpha^s_{\omega(t)}\varphi^d_s(\omega(t),t)\right) \\
& \qquad\qquad \le \eta_{ke},\ \omega\in\Omega_{ke},\ k\in K_0,\ e\in E_0, \\
& \sum_{t\in\widehat{T}}\sum_{i\in K}\varphi^d_s(i,t)\le\Phi^d_s,\ s\in S,\ d\in D, \\
& \varphi^d_s(i,t)\ge 0,\ i\in\boldsymbol{K},\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}},\ s\in S,\ d\in D.
\end{aligned}
$$

目標の最適なパス戦略は φ^* を使った線形計画問題により導出できるが，その詳細は省略する．

3. 複数種捜索資源を自由に組み合わせ可能なモデル B

このモデルでは，捜索者は，捜索コスト制約下で複数種類の資源を自由に組み合わせて使用できる．2 節の前提 A3 のみを次の前提で置き換えたモデルを考える．

B3. 捜索者は，有限数の複数種類の資源を使用できる．種類の集合を $\boldsymbol{S}$ で表す．捜索者は，時点 τ 以降の時間区間 $\widehat{\boldsymbol{T}}=\{\tau,\tau+1,\cdots,T\}$ で捜索資源を使用できる．種類 $s\in\boldsymbol{S}$ の資源を単位量使用するにはコスト c_s を要し，捜索者は総捜索コスト C の制約下で複数種の捜索資源を各時点 $t\in\boldsymbol{T}$，各セルに分割して捜索に使用する．

モデル A と異なり，モデル B では捜索者には個人情報が無いため，捜索資源配分をタイプのない変数 $\varphi=\{\varphi_s(i,t), i\in\boldsymbol{K}, t\in\widehat{\boldsymbol{T}}, s\in\boldsymbol{S}\}$ で表す．$\varphi_s(i,t)$ は種類 s の資源の時点 t，セル i への投入量である．ただし，目標の混合戦略は，モデル A と同じく，$\pi=\{\pi_{ke},\ (k,e)\in K_0\times E_0\}$ を用いる．戦略 φ 及び π を用いて，捜索者及び全タイプの目標で共通の評価尺度となる期待非探知確率 $Q(\varphi,\pi)$ は次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
Q(\varphi,\pi)=&\sum_{k\in K_0}\sum_{e\in E_0} f(k)g(e)\sum_{\omega\in\Omega_{ke}}\pi_{ke}(\omega) \\
&\times\exp\left(-\sum_{t\in\widehat{T}}\sum_{s\in S}\alpha^s_{\omega(t)}\varphi_s(\omega(t),t)\right)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

これを共通の期待支払として，目標は最大化プレイヤーとして，捜索者は最小化プレイヤーとして行動する．モデル B は，捜索者の個人情報の有無と捜索資源配分の実行可能条件の点でモデル A とは若干異なるが，均衡解の導出には似た手順が可能である．期待非探知確率のミニマックス最適化 $\min_\varphi \max_\pi Q(\varphi,\pi)$ により，最適な捜索資源配分は次の凸計画問題を解いて導出できる．

$$
\begin{aligned}
P_S^B:\quad & \min_{\varphi,\xi}\sum_{k\in K_0}\sum_{e\in E_0} f(k)g(e)\exp(-\xi_{ke}) \\
s.t.\quad & \sum_{t\in\widehat{T}}\sum_{s\in S}\alpha^s_{\omega(t)}\varphi_s(\omega(t),t)\ge\xi_{ke}, \\
& \qquad\qquad \omega\in\Omega_{ke},\ k\in K_0,\ e\in E_0, \\
& \sum_{s\in S}c_s\sum_{t\in\widehat{T}}\sum_{i\in K}\varphi_s(i,t)\le C, \\
& \varphi_s(i,t)\ge 0,\ i\in\boldsymbol{K},\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}},\ s\in S.
\end{aligned}
$$

このモデルに関しても，φ^* を使った線形計画問題により目標の最適戦略 π^* を求めることができる．

4. モデル A とモデル B の関係

モデル A では複数種類の捜索資源の組合せが自然による偶然手番により決まり，モデル B では捜索者に委ねられる．したがって，モデル B の方が捜索者の意思決定の自由度が高く，より小さな均衡の非探知確率を実現しそうである．このことは，指数関数の凸性を用いた次の評価により証明できる．

$$
\begin{aligned}
R(\varphi,\pi)=&\sum_{k\in K_0} f(k)\sum_{e\in E_0} g(e)\sum_{\omega\in\Omega_{ke}}\pi_{ke}(\omega) \\
&\times\sum_{d\in D} l(d)\exp\left(-\sum_{t\in\widehat{T}}\sum_{s\in S}\alpha^s_{\omega(t)}\varphi^d_s(\omega(t),t)\right) \\
\ge&\sum_{k\in K_0} f(k)\sum_{e\in E_0} g(e)\sum_{\omega\in\Omega_{ke}}\pi_{ke}(\omega) \\
&\times\exp\left(-\sum_{t\in\widehat{T}}\sum_{s\in S}\alpha^s_{\omega(t)}\sum_{d\in D} l(d)\varphi^d_s(\omega(t),t)\right)
\end{aligned}
$$

の最終式に $\varphi_s(i,t)\equiv\sum_{d\in D} l(d)\varphi^d_s(i,t)$ の置換を行えば，モデル B の期待非探知確率 $Q(\varphi,\pi)$ に一致する．さらに，モデル B における捜索者戦略の実行可能領域はモデル A のそれを包含することから，上述した予想が正しいことが証明できる．

5. おわりに

数値例によるプレイヤーの最適戦略の分析は，発表会当日提示する．

参考文献

[1] R. Hohzaki and K. Joo, JORSJ, **58**(4), 353–375, 2015.

[2] R. Hohzaki, Contributions to Game Theory and Management, **10**, 129-142, 2017.

[3] 宮田鉄矢，宝崎隆祐，佐久間大, 防衛大学校理工学研究報告, **56**(1), 121–130, 2018.