

単体法が生成する基底解の数の上界

北原 知就

単体法は、線形計画問題を解く最も有名なアルゴリズムである。Klee-Minty が実際の反復回数が指数回になり得るという否定的な研究結果を発表したことにより、単体法の反復回数についてはあまり研究されておらず、反復回数についてのよい上界は得られていない。Klee-Minty の結果のほかに、単体法の反復回数の解析を難しくしているものとして、問題の退化がある。問題が退化していると、反復を行っても解が更新されなかったり、巡回現象により反復を無限に繰り返す可能性がある。著者らは反復回数ではなく、生成される実行可能基底解の数に注目し、いくつかの上界を得ることができた。本稿ではそれらの上界について、その着想に触れながら、時系列に沿ってまとめる。

キーワード：線形計画問題, 単体法, 実行可能基底解

1. はじめに

単体法は線形計画問題を解くための解法の一つであり、その効率性から、開発から 60 年を過ぎた今日も、実際に利用されている。Klee and Minty [9] が、実際の反復回数が指数回になり得るという否定的な研究結果を発表したことにより、単体法の反復回数についてはあまり研究されておらず、反復回数についてのよい上界は得られていない。Klee-Minty の結果のほかに、単体法の反復回数の解析を難しくしているものとして、問題の退化がある。問題が退化していると、反復を行っても解が更新されなかったり、巡回現象により反復を無限に繰り返す可能性がある。

そこで、単体法が生成する異なる実行可能基底解の数に注目する。実行可能基底解の数は有限であるから、この数は有限である。本稿の目的は、著者らが行った単体法が生成する実行可能基底解の数の上界についての最近の研究結果を、その着想に触れながら、時系列に沿ってまとめることである。

著者らが行った研究では、解が更新されるときには目的関数が改善するような単体法を採用した。上界の研究は、次のような流れで行った。

(B-1) ピボット規則を Dantzig の規則に限定する。この場合、解が更新される場合に最適値と目的関数値の差が一定比率以上で減少することが示せ、主問題の実行可能領域から定まるパラメータに依存した上界が得られる。

(B-2) ピボット規則を一般にとる。この場合、解が更新される場合に目的関数値が一定値以上減少することが示せる。このことから、主問題、双対問題の制約条件から定まるパラメータに依存した上界が得られる。

(B-3) 0-1 多面体に注目する。目的関数ベクトルの各要素が整数であれば、解が更新されると目的関数値が 1 以上減る。よって、頂点間の目的関数値の差の最大値が得られれば、上界を得ることができる。

それぞれの事項について、順に説明する。

(B-1) に関して、Kitahara and Mizuno [7] はマルコフ決定問題に対する Ye [13] の結果を、一般の標準形線形計画問題に拡張した。そして、線形計画問題を Dantzig の規則の単体法で解くとき、生成される異なる実行可能基底解の数が、多くとも

$$(n-m) \left[\min\{m, n-m\} \frac{\gamma_P}{\delta_P} \log \left(\min\{m, n-m\} \frac{\gamma_P}{\delta_P} \right) \right]$$

または単純に

$$n \left[m \frac{\gamma_P}{\delta_P} \log \left(m \frac{\gamma_P}{\delta_P} \right) \right] \quad (1)$$

となることを示した。ここで、 m は等式制約の数、 n は変数の数、 δ_P と γ_P はそれぞれすべての実行可能基底解のすべての正の要素の最小値と最大値を表し、実数 $a \in \mathcal{R}$ に対して $\lceil a \rceil$ は a より大きい最小の整数を表す。この上界は、線形計画問題の制約条件のみに依存し、目的関数とは無関係である。Kitahara, Matsui, and Mizuno [3] と Kitahara and Mizuno [2] では、標

きたはら ともなり
東京工業大学社会理工学研究科
〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1

準形の線形計画問題だけでなく、変数の上限制約を持つ線形計画問題や双対単体法に対しても、同様の上界を得ることができることを示した。上界の質について、Kitahara and Mizuno [1] では、Klee-Minty 問題の変種を構築し、実際に生成される解の数が γ_P/δ_P に一致する例があることを示した。したがって、生成される解の数の上界として、 γ_P/δ_P よりもよいものを得ることができない。よって、比 γ_P/δ_P の値が大きいつま、上記の (1) はかなり良い上界を与えているといえる。

次に (B-2) について述べる。Kitahara and Mizuno [8] では、毎回の反復において、目的関数の係数が負であるような非基底変数を入力変数に選ぶ単体法を解析した。そして、生成される実行可能基底解の数が高々次の値でおさえられることを示した。

$$m \frac{\gamma_P \gamma'_D}{\delta_P \delta'_D}. \quad (2)$$

ここで、 δ'_D と γ'_D はそれぞれ、主実行可能基底に対応する双対基底解のすべての負の要素の絶対値の最小値と最大値を表す。Kitahara and Mizuno [4] は生成される異なる実行可能基底解の数が $m \frac{\gamma_P \gamma'_D}{\delta_P \delta'_D}$ である問題例を構成し、上記の上界がタイトであることを示した。

次に、(B-3) の説明に移る。Kitahara and Mizuno [4] では、0-1 多面体上の線形計画問題において生成される実行可能基底解の数と多面体上の路の関係を考察し、「0-1 多面体上の任意の 2 頂点に対し、それらを結ぶ長さが 0-1 多面体の次元以下の路を、関連する線形計画問題を解くことにより得られる」ことを示した。この結果は、「0-1 多面体の直径が多面体の次元以下である」という Naddef [12] による古典的結果の別証明となっている。Kleinschmit and Onn [10] は Naddef の結果を拡張し、 d 次元空間の整数多面体で、各頂点の座標が 0 以上 k 以下の値をとるものを見ると、その直径が kd 以下となることを証明している。

本稿よりも詳しいまとめとして、Kitahara and Mizuno [5]、北原・水野 [6] があるので、興味を持たれた方は参照していただきたい。

本稿の構成は以下のとおりである。第 2 節で、線形計画問題と単体法について簡単に説明する。第 3 節では、Dantzig の規則の単体法の解析について説明する。続く第 4 節では、一般のピボット規則の単体法が生成する実行可能基底解の数の上界について述べる。第 5 節では、問題の整数性に注目して得られる上界について説明する。本稿では、 \mathbf{e} は要素がすべて 1 のベクトルを表し、 $\mathbf{0}$ は要素がすべて 0 のベクトルを表す。それぞれの次元は、文脈から定まるものとする。

2. 線形計画問題と単体法

この節では、線形計画問題と単体法について簡単に説明する。詳しい内容は、例えば久保・田村・松井 [11] を参照していただきたい。等式標準形線形計画問題

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \\ \text{制約条件} \quad & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3)$$

を考える。ここで、 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 、 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ 、 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ は与えられたデータであり、 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ が変数ベクトルである。問題 (3) の双対問題は次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & \mathbf{b}^T \mathbf{y}, \\ \text{制約条件} \quad & \mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{s} = \mathbf{c}, \quad \mathbf{s} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ と $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ が変数ベクトルである。ここで、次の仮定を置く。

- (i) 行列 \mathbf{A} のランクは m である。
- (ii) 問題 (3) は最適解を持つ。
- (iii) 問題 (3) の初期実行可能基底解 \mathbf{x}^0 が得られている。 \mathbf{x}^* を問題 (3) の最適基底解とし、 z^* を最適値とする。双対定理より、双対問題 (4) も最適解を持ち、最適値は z^* で一致する。 $(\mathbf{y}^*, \mathbf{s}^*)$ を双対問題 (4) の最適基底解とする。

与えられた添え字集合 $B \subset \{1, 2, \dots, n\}$ とその補集合 $N = \{1, 2, \dots, n\} - B$ によって、 \mathbf{A} 、 \mathbf{c} 、 \mathbf{x} と \mathbf{s} を次のように分割する。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\mathbf{A}_B, \mathbf{A}_N), \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_B \\ \mathbf{c}_N \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_B \\ \mathbf{s}_N \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

\mathbf{A}_B が $m \times m$ の正則行列である場合、添え字集合 B を基底と呼ぶ。 \mathcal{B} を基底の集合とする。任意の基底 $B \in \mathcal{B}$ と非基底 $N = \{1, 2, \dots, n\} - B$ によって、主問題は次のように書き表すことができる。

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N, \\ \text{制約条件} \quad & \mathbf{A}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

\mathbf{A}_B は正則であるので、さらに次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + (\mathbf{c}_N - \mathbf{A}_N^T (\mathbf{A}_B^{-1})^T \mathbf{c}_B)^T \mathbf{x}_N, \\ \text{制約条件} \quad & \mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N, \\ & \mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5)$$

この形式は、問題 (3) の辞書と呼ばれる。縮約コスト (reduced cost) ベクトルを $\bar{\mathbf{c}}_N = \mathbf{c}_N - \mathbf{A}_N^T (\mathbf{A}_B^{-1})^T \mathbf{c}_B$ と定義すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + \bar{\mathbf{c}}_N^T \mathbf{x}_N, \\ \text{制約条件} \quad & \mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N, \\ & \mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (6)$$

辞書から、対応する基底解が次のように得られる。

$$\mathbf{x}^B = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B^B \\ \mathbf{x}_N^B \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_B^B = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_N^B = \mathbf{0}. \quad (7)$$

この表記のように、現在の基底 B を明示する必要が有るときは、ベクトル \mathbf{x} の上側に記す。下側の添え字は、ベクトル \mathbf{x} からどの要素を取り出したかを表す。もし $\mathbf{x}_B^B \geq \mathbf{0}$ ならば、これは実行可能基底解となる。実行可能基底の集合を $\mathcal{B}_P = \{B \in \mathcal{B} \mid \mathbf{x}_B^B \geq \mathbf{0}\}$ と定める。既に述べたように、 δ_P と γ_P を主実行可能基底解のすべての正の要素の最小値と最大値と定義する。すると、 $B \in \mathcal{B}_P$ かつ $x_j^B \neq 0$ ならば $\delta_P \leq x_j^B \leq \gamma_P$ が成り立つ。

\mathbf{x}^0 を (3) の初期実行可能基底解とし、単体法によって生成される点の列を $\{\mathbf{x}^p \mid p = 0, 1, 2, \dots\}$ とする。 B^p を \mathbf{x}^p の基底とし、 $N^p = \{1, 2, \dots, n\} - B^p$ を非基底とする。もし p 反復目の縮約コストベクトルが $\bar{\mathbf{c}}_{N^p} \geq \mathbf{0}$ を満たすならば、現在の解が最適解となる。そうでない場合は、ピボットを行う。つまり、現在非基底の変数の一つを選び、それを入力変数とする。そして、ある基底変数の値が 0 になるまで入力変数の値を増やす。 x_{j^p} を p 反復目の入力変数とすると、次の反復点 \mathbf{x}^{p+1} における目的関数値は、

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^{p+1} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^p + \bar{c}_{j^p} x_{j^p}^{p+1} \quad (8)$$

となる。入力変数を選ぶ方法はさまざまあり、有名なものとしては最小係数規則 (Dantzig の規則)、最大改善規則、最小添え字規則 (Bland の規則) がある。

Dantzig の規則のもとでは、縮約コストベクトルの要素が最小のものを入力変数に選ぶ。より正確には、

$$j^p \in \arg \min_{j \in N^p} \bar{c}_j$$

を満たす添え字 j^p を選び、 x_{j^p} を入力変数とする。

Bland の規則に従うと、単体法は必ず有限回の反復で終了することが知られている。

3. Dantzig の単体法の解析

この節では、Dantzig の規則の単体法によって生成される基底解の数を評価するための解析について説明する。 \mathbf{x}^0 を主問題 (3) の初期実行可能基底解とし、

$\{\mathbf{x}^p \mid p = 0, 1, 2, \dots\}$ を単体法によって生成される点列とする。

次の命題は、Dantzig の規則の単体法において解が更新されるとき、目的関数値と最適値との差が一定比率以上で減少することを示している。

命題 3.1 (Theorem 1 in [7]). \mathbf{x}^p と \mathbf{x}^{p+1} をそれぞれ、Dantzig の規則の単体法の $p, p+1$ 反復目の点とする。このとき、もし $\mathbf{x}^p \neq \mathbf{x}^{p+1}$ ならば、

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^{p+1} - z^* \leq \left(1 - \frac{\delta_P}{m\gamma_P}\right) (\mathbf{c}^T \mathbf{x}^p - z^*) \quad (9)$$

が成り立つ。

次の命題は、もし現在の解が最適でないならば、現在の基底変数の中で正の値を持つものの中に、上界が指数関数的に減少するものがあることを示している。この証明には、命題 3.1 が用いられる。

命題 3.2 (Lemma 2 in [7]). \mathbf{x}^p を Dantzig の規則の単体法の p 反復目の点とする。もし \mathbf{x}^p が最適解でなければ、ある添え字 $\bar{j} \in B^p$ が存在して、次の 2 つの条件を満たす。

1. $x_{\bar{j}}^p > 0$.
2. p 回目の反復点 \mathbf{x}^p から $l(> p)$ 回目の反復点までに l 個の異なる実行可能基底解が生成されるならば、

$$x_{\bar{j}}^l \leq m\gamma \left(1 - \frac{\delta_P}{m\gamma_P}\right)^l$$

が成り立つ。

命題 3.2 で存在が示唆された変数の値は、 δ_P を超えて下がり続けることはできず、あるところで 0 となり、以後の反復では 0 であり続ける。より正確には、次の命題が成り立つ。

命題 3.3 (Lemma 3 in [7]). \mathbf{x}^p を Dantzig の規則の p 反復目の点とする。 \mathbf{x}^p が最適でないならば、ある $\bar{j} \in B^p$ が存在して以下の 2 つの条件を満たす。

1. $x_{\bar{j}}^p > 0$.
2. p 反復目以降に $\lceil m \frac{\gamma_P}{\delta_P} \log(m \frac{\gamma_P}{\delta_P}) \rceil$ より多くの実行可能基底解が生成されるならば、それ以降、 $x_{\bar{j}}$ の値は 0 であり続ける。

以上のいくつかの命題の理解を助けるため、図 1 を用いる。簡単のため、問題は退化していないとする。

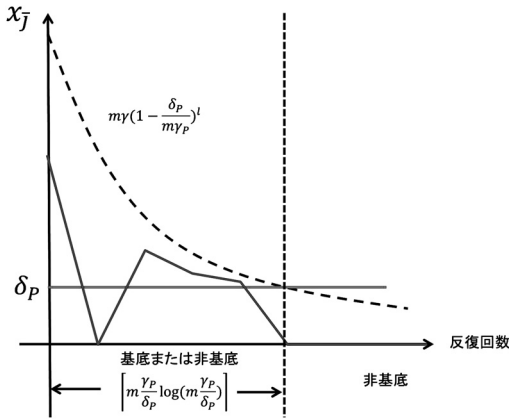


図1 命題の視覚的理解

初期点 \mathbf{x}^0 は最適解でないとする。このとき、命題 3.2 で存在が示唆される添え字を \bar{j} とする。初期点において $x_{\bar{j}}$ は基底変数であり、正の値をとる。反復を重ねると $x_{\bar{j}}$ は基底に入ったり、出たりを繰り返すが、その値は常にある指数関数以下となる。反復を重ね、その上界値が δ_P 以下となると、 δ_P の定義から $x_{\bar{j}}$ の値は 0 となるしかなく、以後の反復では 0 であり続ける。上界値が δ_P 以下となるまでに必要な反復回数は $\lceil m \frac{\gamma_P}{\delta_P} \log(m \frac{\gamma_P}{\delta_P}) \rceil$ 以下である。

命題 3.3 で述べた現象は、各変数について高々一度しか起こらない。このことから、次の定理が成り立つ。

定理 3.1 (Theorem 2 in [7]). 最適解を持つ線形計画問題に対して Dantzig の規則の単体法を適用すると、任意の目的関数 $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ に対して、生成される異なる実行可能基底解の数は

$$n \left\lceil m \frac{\gamma_P}{\delta_P} \log \left(m \frac{\gamma_P}{\delta_P} \right) \right\rceil$$

以下となる。

4. 一般のピボット規則の解析

Dantzig の規則の単体法の解析は、証明を追うのはやさしいが、巧妙なアイデアに基づいている（このアイデアを最初に示したのは Ye [13] である）。また、得られた上界は主問題の制約にのみ依存し、目的関数には無関係である。これに対し、Kitahara and Mizuno [8] の一般のピボット規則の解析は非常に単純なアイデアに基づいている。そのアイデアとは、

- 初期目的関数値と最適値との差の上界を M とし、
- 解が更新されるときに目的関数値が少なくとも L

減少すれば、

生成される異なる実行可能基底解の数は M/L 以下となる、というものである。主問題、双対問題の制約条件から定まるパラメータを使えば、 M 、 L を陽に与えることができる。そして、得られる上界はこれらのパラメータに依存する。

以下、 M 、 L を導出する。そのための準備として、双対問題 (4) の辞書を書いてみると次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & \mathbf{b}^T (\mathbf{A}_B^T)^{-1} \mathbf{c}_B - \mathbf{b}^T (\mathbf{A}_B^T)^{-1} \mathbf{s}_B, \\ \text{制約条件} \quad & \mathbf{y} = (\mathbf{A}_B^T)^{-1} \mathbf{c}_B - (\mathbf{A}_B^T)^{-1} \mathbf{s}_B, \\ & \mathbf{s}_N = (\mathbf{c}_N - \mathbf{A}_N^T (\mathbf{A}_B^T)^{-1} \mathbf{c}_B) \\ & \quad + \mathbf{A}_N^T (\mathbf{A}_B^T)^{-1} \mathbf{s}_B \\ & \mathbf{s}_B \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{s}_N \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

\mathbf{y} は目的関数に現れないので、この部分を除くと次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & \mathbf{b}^T (\mathbf{A}_B^T)^{-1} \mathbf{c}_B - \mathbf{b}^T (\mathbf{A}_B^T)^{-1} \mathbf{s}_B, \\ \text{制約条件} \quad & \mathbf{s}_N = (\mathbf{c}_N - \mathbf{A}_N^T (\mathbf{A}_B^T)^{-1} \mathbf{c}_B) \\ & \quad + \mathbf{A}_N^T (\mathbf{A}_B^T)^{-1} \mathbf{s}_B \\ & \mathbf{s}_B \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{s}_N \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (10)$$

主問題の辞書 (5) と比較すると、

$$\begin{aligned} & \text{主問題の辞書の縮約ベクトル} \\ & = \text{双対問題の辞書の非基底スラックベクトル} \end{aligned}$$

という関係がわかる。今、主実行可能基底に対応する双対基底解の負の要素の絶対値の最大値を γ'_D とする。より正確には、

$$\gamma'_D = \max\{-s_j^B \mid B \in \mathcal{B}_p, s_j^B < 0\} \quad (11)$$

となる。すると初期点 \mathbf{x}^0 に対応する辞書において、

$$\begin{aligned} z^* &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* \\ &= \mathbf{c}_{B^0}^T \mathbf{A}_{B^0}^{-1} \mathbf{b} + \bar{\mathbf{c}}_{N^0} \mathbf{x}_{N^0}^* \\ &\geq \mathbf{c}^T \mathbf{x}^0 - m\gamma_P \gamma'_D \end{aligned}$$

となる。ここで、最終行の不等式の導出において、 \mathbf{x}^* の正の要素は高々 m 個で、それぞれ γ_P 以下となることを用いた。したがって、初期目的関数値と最適値との差は

$$m\gamma_P \gamma'_D \quad (12)$$

以下となる。

次に、主実行可能基底に対応する双対基底解の負の要素の絶対値の最小値を δ'_D とする。正確に書くと、

$$\delta'_D = \min\{-s_j^B \mid B \in \mathcal{B}_p, s_j^B < 0\} \quad (13)$$

となる. δ_P, δ'_D の定義と目的関数の更新式 (8) より,

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^{p+1} - \mathbf{c}^T \mathbf{x}^p \geq \delta_P \delta'_D \quad (14)$$

が成り立つ. (12), (14) から次の定理が成立する.

定理 4.1. \mathbf{x}^0 を主問題の初期実行可能基底解とする. 毎回の反復において, 縮約コストベクトルの要素が負のものを入力変数に選ぶと, 生成される異なる実行可能基底解の数は

$$m \frac{\gamma_P \gamma'_D}{\delta_P \delta'_D}$$

以下となる.

非常に単純なアイデアから得られた上界であるが, この上界はタイトである. すなわち, 生成される異なる実行可能基底解の数が $m \frac{\gamma_P \gamma'_D}{\delta_P \delta'_D}$ であるような線形計画問題の例を構成できる. 以下, それを紹介する.

m 次元立方体上の線形計画問題

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & -\mathbf{e}^T \mathbf{x}, \\ \text{制約条件} \quad & \mathbf{x} \leq \mathbf{e} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

を考える. ここで, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ が変数ベクトルである. スラック変数 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ を導入して標準形に直すと次のようになる.

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & -\mathbf{e}^T \mathbf{x}, \\ \text{制約条件} \quad & \mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{e}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

この問題の双対問題は次のようになる.

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & \mathbf{e}^T \mathbf{y}, \\ \text{制約条件} \quad & \mathbf{y} \leq -\mathbf{e}, \\ & \mathbf{y} \leq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

これらの問題に対して, $\delta_P, \gamma_P, \delta'_D, \gamma'_D$ を計算すると,

$$\delta_P = \gamma_P = \delta'_D = \gamma'_D = 1$$

となることがわかる [4].

主問題の最適解は

$$\mathbf{x}^* = (1, 1, \dots, 1)^T, \quad \mathbf{u}^* = (0, 0, \dots, 0)^T$$

となる. ここで, 初期点を

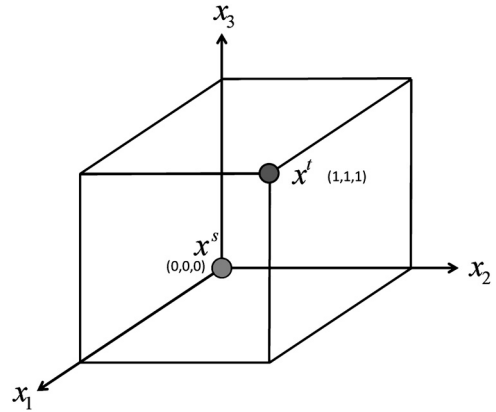


図 2 3次元の場合の例

$$\mathbf{x}^0 = (0, 0, \dots, 0)^T, \quad \mathbf{u}^0 = (1, 1, \dots, 1)^T$$

と定める. 実行可能領域は 0-1 立方体であり, $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)$ と $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ を結ぶ最短路の長さは m である. よって $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)$ から単体法を開始すると, 最適解 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ までに少なくとも m 個の実行可能基底解が生成される. 3次元の場合の例を, 図 2 に示した. 一方, 定理 4.1 により, 生成される異なる実行可能基底解の数は高々 $m \frac{\gamma_P \gamma'_D}{\delta_P \delta'_D}$ であり, これは m に等しい. よって, 単体法はちょうど $m \frac{\gamma_P \gamma'_D}{\delta_P \delta'_D}$ 個の異なる実行可能基底解を生成する

5. 0-1 多面体における上界

この節で紹介する上界を導出するアイデアは, 前節のものと同じである. d 次元の多面体で, すべての頂点において, 各座標の値が 0 か 1 であるとき, その多面体を 0-1 多面体という. $P \subset \mathbb{R}^d$ を 0-1 多面体として, 次の線形計画問題

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \\ \text{制約条件} \quad & \mathbf{x} \in P \end{aligned} \quad (15)$$

を考える. ここで, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$ の各要素は整数であるとする. 問題 (15) と等価な標準形線形計画問題を構成することができ, その実行可能基底解と P の頂点を同一視する. $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$ の各要素が整数なので, P の 2 つの頂点において目的関数値が異なるならば, その差は 1 以上である. また, 2 つの頂点における目的関数値の差が $C = \sum_{j=1}^d |c_j|$ 以下となることもわかる. よって, 次の命題が成り立つ.

命題 5.1. $P \subset \mathbb{R}^d$ を 0-1 多面体とし, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$ を整数ベクトルとする. このとき問題 (15) に対して単

体法を適用すると、生成される異なる頂点の数は高々 $C = \sum_{j=1}^d |c_j|$ である。

0-1 多面体の任意の 2 頂点に対し、それらを結ぶ長さが d 以下の路を求めることができる。 \mathbf{x}^s , \mathbf{x}^t を P の 2 つの異なる頂点とする。このとき、ベクトル $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_d)$ を

$$c_j = \begin{cases} -1 & x_j^t = 1 \text{ のとき} \\ 1 & x_j^t = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定めて、線形計画問題 (15) を考える。このとき、 \mathbf{x}^t はこの線形計画問題の唯一の最適解である。 \mathbf{x}^s から Bland の規則の単体法を適用すると、有限回の反復で最適解 \mathbf{x}^t が得られる。そのとき生成される異なる頂点の数、言い換えると最適解までにたどる P の辺の数は、命題 5.1 より $|C| = \sum_{j=1}^d |c_j| = d$ 以下となる。よって、 \mathbf{x}^s と \mathbf{x}^t の間に長さ d 以下の路があることがわかる。以上の議論により、次の定理が成り立つ。

定理 5.1. d 次元空間の 0-1 多面体の直径は d 以下である。

この結果は、Naddef [12] によって初めて証明された。その後、Kleinschmit and Onn [10] が d 次元の整数多面体で、各頂点の座標が 0 以上 k 以下の値をとるものを考えると、その直径が kd 以下となることを示した。

謝辞 本稿で紹介した研究の一部は、JSPS 科学研究費の若手研究 (B)23710164 の補助を受けて行われた。本稿の原稿を読み、コメントをいただいた東京工業大学 水野真治教授に感謝いたします。

参考文献

- [1] T. Kitahara and S. Mizuno, Klee-Minty's LP and upper bounds for Dantzig's simplex method, *Operations Research Letters*, **39** (2011), 88–91.
- [2] T. Kitahara and S. Mizuno, On the number of solutions generated by the dual simplex method, *Operations Research Letters*, **40** (2012), 172–174.
- [3] T. Kitahara, T. Matsui and S. Mizuno, On the number of solutions generated by Dantzig's simplex method for LP with bounded variables, *Pacific Journal of Optimization*, **8** (2012), 447–455.
- [4] T. Kitahara and S. Mizuno, The simplex method and the diameter of a 0-1 polytope, *Technical report, Tokyo Institute of Technology* (2012).
- [5] T. Kitahara and S. Mizuno, On the number of solutions generated by the simplex method for LP, *Technical report, Tokyo Institute of Technology* (2012).
- [6] 北原知就, 水野真治, 単体法の計算量の新評価, 日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌, **55** (2012), 66–83.
- [7] T. Kitahara and S. Mizuno, A bound for the number of different basic solutions generated by the simplex method, *Mathematical Programming*, **137** (2013), 579–586.
- [8] T. Kitahara and S. Mizuno, An upper bound for the number of different solutions generated by the primal simplex method with any selection rule of entering variables, *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, **30** (2013), DOI: 10.1142/S0217595913400125.
- [9] V. Klee and G. J. Minty, *How good is the simplex method*, In O. Shisha (ed), *Inequalities III* (Academic Press, New York, 1972).
- [10] P. Kleinschmit and S. Onn, On the diameter of polytopes. *Discrete Mathematics*, **102** (1992), 75–77.
- [11] 久保幹雄, 田村明久, 松井知己 (編), 応用数理計画ハンドブック (朝倉書店, 2002).
- [12] D. Naddef, The Hirsh conjecture is true for (0,1)-polytopes, *Mathematical Programming*, **45** (1989), 109–110.
- [13] Y. Ye, The simplex and policy iteration methods are strongly polynomial for the Markov decision problem with a fixed discount rate, *Mathematics of Operations Research*, **36** (2011), 593–603.