M/M/1 を越えて
—準出生死滅過程への招待—

滝根　哲哉

最も基本的な待ち行列モデルである M/M/1 の系内客数過程は出生死滅過程と呼ばれる特殊な構造をもつ連続時間マルコフ連鎖で表現され，その定常状態分布は幾何分布に従う．本稿では，出生死滅過程を自然な形で拡張した準出生死滅過程を紹介する．特に，客へのサービスが二つの指数ステージで施される待ち行列モデルを具体例として取り上げ，その定常状態分布の行列幾何形式解を求める手順を解説する．さらに，系内客数過程を準出生死滅過程として表現できる待ち行列モデル群を紹介する．

キーワード：出生死滅過程，準出生死滅過程，行列幾何形式解

1. はじめに

客の到着間隔ならびにサービス時間が指数分布に従う単一サーバ待ち行列 M/M/1 は待ち行列モデルの中で最も基本的なものであり，本稿の読者であれば誰でも知っていると思う．定常な M/M/1 の解析は，通常，系内客数を連続時間マルコフ連鎖で表現して，その定常状態分布が満たす連立一次方程式を導き，その解を求めるという手順をとる．ここで，系内に滞在可能な総客数に制限が無い場合，解かなければならない連立一次方程式は無限個の未知数を含んでいるため，解析的な解を求めることは一般にはできない．しかし，M/M/1 の場合は非常に単純な形の定常状態分布をもつ．その理由は M/M/1 における系内客数過程が連続時間マルコフ連鎖の非常に特殊な例となっているためである．では，何がどう特殊なのであろうか．

まず第一に，M/M/1 の系内客数過程を表す連続時間マルコフ連鎖では，隣り合う状態間だけで状態遷移が起こる．このような性質をもつマルコフ連鎖を出生死滅過程という．さらに，すべての自然数 k に対して，状態 k から隣り合う状態 $k-1$ ならびに状態 $k+1$ への遷移率が k の値によらず，同一である．すなわちマルコフ連鎖の構造が空間的に同質となっている．これが単純な形をした定常状態分布をもつ理由である．

本稿では，出生死滅過程を自然な形で一般化することを考える．すなわち，マルコフ連鎖の状態を適切にグループ化することで，異なるグループに属する状態への遷移が隣接するグループ内の状態に限定できる場合を考える．このような性質をもつマルコフ連鎖は準出生死滅過程と呼ばれており，以下で見るように，各グループに含まれる状態の数が等しく，グループ内ならびにグループ外への各遷移率がグループによらない空間的な同質性があれば，単純な形をした定常状態分布が存在する．さらに，多くの待ち行列モデルがこのような性質をもつことを具体的な例を通して示す．

たきね　てつや
大阪大学工学研究科電気電子情報工学専攻
〒 565-0871 大阪府吹田市山田丘 2–1

2. 連続時間マルコフ連鎖の定常状態分布

本題へ入る前に，連続時間マルコフ連鎖とその定常状態分布について簡単にまとめておく．状態空間 $\mathcal{S}=\{0,1,\ldots\}$ 上の既約[1]で正再帰的[2]な連続時間マルコフ連鎖 $\{X(t);\ t\geq 0\}$ を考える．マルコフ性より，$s,t\geq 0$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\Pr(X(s+t)=j \mid X(u)\,(0\leq u\leq s))\\
&\qquad =\Pr(X(s+t)=j \mid X(s)),\quad j\in\mathcal{S}
\end{aligned}
$$

が成立する．連続時間マルコフ連鎖 $\{X(t);\ t\geq 0\}$ は以下で定義される遷移率（あるいは推移率）$q(i,j)$ $(i,j\in\mathcal{S},\, i\neq j)$ によって特徴づけられる．

$$
q(i,j)=\lim_{\tau\to 0+}\frac{\Pr(X(t+\tau)=j \mid X(t)=i)}{\tau}
$$

[1] 任意の状態の組 $i,j\in\mathcal{S}$ $(i\neq j)$ に対して，何回かの状態遷移を経ることで状態 i から状態 j へ到達できること．
[2] 任意の状態 $i\in\mathcal{S}$ に対して，状態 i から他の状態に遷移したという条件下で，何回かの遷移を経た後，再び状態 i に到達する確率が 1 であり，かつ，再び状態 i に到達するまでの平均再帰時間が有限であること．

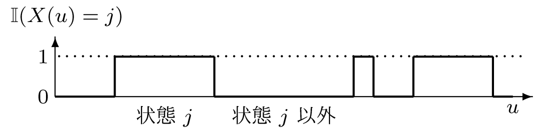

図 1　指示関数 $\mathbb{I}(X(u)=j)$

定義より，遷移率は以下の確率的意味をもつ．

$$\Pr(X(t+\tau)=j \mid X(t)=i)=q(i,j)\tau+o(\tau)$$

状態 i から出る遷移率の総和を $q(i)$ とする．

$$q(i)=\sum_{j\in\mathcal{S}\setminus\{i\}} q(i,j), \quad i\in\mathcal{S}$$

このとき，連続時間マルコフ連鎖 $\{X(t);\ t\geq 0\}$ は以下の動作規則を繰り返す．

(i) 現在の状態 i にパラメータ $q(i)$ の指数分布に従う時間だけ滞在する（平均滞在時間は $1/q(i)$）

(ii) 状態 i の滞在終了後，確率 $q(i,j)/q(i)$ で次の状態 j へ遷移する

連続時間マルコフ連鎖 $\{X(t);\ t\geq 0\}$ の定常状態確率 π_j $(j\in\mathcal{S})$ を次式で定義する．

$$\pi_j=\lim_{t\to\infty}\Pr(X(t)=j), \quad j\in\mathcal{S}$$

連続時間マルコフ連鎖 $\{X(t);\ t\geq 0\}$ が既約で正再帰的である場合，定常状態確率 π_j $(j\in\mathcal{S})$ が必ず存在し，π_j $(j\in\mathcal{S})$ は大域平衡方程式と呼ばれる以下の式

$$\pi_j q(j)=\sum_{i\in\mathcal{S}\setminus\{j\}}\pi_i q(i,j), \quad j\in\mathcal{S} \tag{1}$$

を満たし，かつ，総和が 1 となる唯一の正数として与えられる．大域平衡方程式 (1) は，定常状態では各状態 j から出る確率フロー（左辺に相当）がその状態 j へ入る確率フロー（右辺に相当）に等しいことを示している．式 (1) から，定常状態分布 $\boldsymbol{\pi}=(\pi_0\ \pi_1\ \cdots)$ は次式を満たすことがわかる．

$$\boldsymbol{\pi Q}=\mathbf{0} \tag{2}$$

ここで，行列 $\boldsymbol{Q}$ は連続時間マルコフ連鎖 $\{X(t);\ t\geq 0\}$ の無限小生成作用素と呼ばれ，$i\neq j$ なる (i,j) 要素は $q(i,j)$，i 番目の対角要素は $-q(i)$ で与えられる．

定常状態分布 $\boldsymbol{\pi}=(\pi_0\ \pi_1\ \cdots)$ は時間平均量という意味も併せもつ．すなわち，定常状態確率 $\pi_j(j\in\mathcal{S})$ は，連続時間マルコフ連鎖の標本路を十分に長い間，観測したとき状態 j にある時間割合を与える．

$$\pi_j=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{I}(X(u)=j)du, \quad j\in\mathcal{S} \tag{3}$$

ただし，$\mathbb{I}(\chi)$ は事象 χ の指示関数であり，事象 χ が成立するとき 1，それ以外は 0 の値をとる（図 1 参照）．

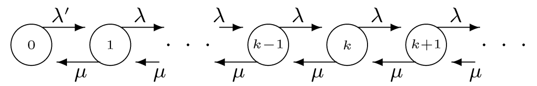

図 2　考察する M/M/1 の状態遷移速度図

3. 出生死滅過程の例： M/M/1

到着率 λ，サービス率 μ をもつ定常な M/M/1 を考える．ただし $0<\lambda<\mu$ とする．なお，次節以降の議論を考慮して，システムが空の場合のみ，客の到着率は λ' (>0) としておく．図 2 はこの M/M/1 の状態遷移速度図[3]である．よって，M/M/1 の系内客数を表す連続時間マルコフ連鎖の無限小生成作用素 $\boldsymbol{Q}$ は以下で与えられる．

$$\boldsymbol{Q}=\begin{array}{c}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{2}\\ \mathbf{3}\\ \vdots\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \cdots\end{array}\\ \begin{pmatrix} -\lambda' & \lambda' & 0 & 0 & \cdots\\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots\\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots\\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}\end{array}$$

定常状態分布を $\boldsymbol{\pi}=(\pi_0\ \pi_1\ \ldots)$ とする．大域平衡方程式 $\boldsymbol{\pi Q}=\mathbf{0}$ を要素ごとに書き下すと以下を得る．

$$-\lambda'\pi_0+\mu\pi_1=0 \tag{4}$$

$$\lambda'\pi_0-(\lambda+\mu)\pi_1+\mu\pi_2=0 \tag{5}$$

$$\lambda\pi_{k-1}-(\lambda+\mu)\pi_k+\mu\pi_{k+1}=0, \quad k=2,3,\ldots \tag{6}$$

M/M/1 に対する通常の解法では，式 (4)–(6) を確率の総和が 1 であるという条件を考慮して代数的に解き，定常状態分布を求める．以下では，通常とは異なる発見的な手順で定常状態分布を求めてみる．

まず，式 (6) が k によらず，同じ形で与えられることに注意する．これは $k\geq 2$ において状態遷移の構造が空間的に同質であることを示している．そこで「ある正数 γ が存在し，

$$\pi_{k+1}=\gamma\pi_k, \quad k=1,2,\ldots \tag{7}$$

が成立する」と仮定する．その結果，次式を得る．

$$\pi_k=\gamma^{k-1}\pi_1, \quad k=1,2,\ldots \tag{8}$$

式 (8) を式 (6) へ代入すると，$k=2,3,\ldots$ に対して

$$\left[\lambda-(\lambda+\mu)\gamma+\mu\gamma^2\right]\gamma^{k-2}\pi_1=0$$

[3] 各状態を接点とし，状態の組 $i,j\in\mathcal{S}$ $(i\neq j)$ に対して $q(i,j)>0$ のとき，接点 i から接点 j へ値 $q(i,j)$ をもつ有向枝を張ったグラフ．

表 1　M/M/1 の解析手順

1. 空間的に同質な部分で，幾何解 (7) を仮定
2. 未知数 γ を空間的に同質の部分の大域平衡方程式より決定（2 次方程式の小さい方の解）
3. 境界部分に対応する大域平衡方程式を幾何解を併用して解く

となり，$\gamma > 0$ であるので $\lambda - (\lambda + \mu)\gamma + \mu\gamma^2 = 0$ を得る．すなわち，$\pi_k = \gamma^{k-1}\pi_1$ となる γ は

$$(\mu\gamma - \lambda)(\gamma - 1) = 0$$

を満たす．さらに $\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k = 1 < \infty$ かつ $\pi_k > 0$ となるためには $0 < \gamma < 1$ が必要である．よって

$$\gamma = \lambda/\mu < 1$$

を得る．ここで 2 次方程式の小さい方の解が γ となることに注意する．以下では $\rho = \lambda/\mu$ とする．

この時点で未知数は π_0 と π_1 である．まず，空間的に同質でない境界部分に対応する大域平衡方程式 (4), (5) を $\mu\pi_2 = \mu\rho\pi_1 = \lambda\pi_1$ を用いて書き換えると

$$\begin{pmatrix}\pi_0 & \pi_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\lambda' & \lambda' \\ \mu & -\mu\end{pmatrix} = 0$$

を得る．また，確率の総和が 1 であることから

$$\pi_0 + \pi_1 \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k-1} = \pi_0 + \pi_1(1-\rho)^{-1} = 1$$

を得る．これらより π_0 と π_1 が決定され，大域平衡方程式を満たす正数 π_k $(k = 0, 1, \ldots)$ が得られる．

$$\begin{aligned}&\pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho+\rho'}, \qquad \pi_1 = \frac{\rho'(1-\rho)}{1-\rho+\rho'}, \\ &\pi_k = \pi_1\rho^{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots\end{aligned} \tag{9}$$

ただし，$\rho' = \lambda'/\mu$ である．定常状態分布は（存在するならば）唯一であるので，式 (9) が定常状態確率を与える．ここまでの手順を表 1 にまとめる．

次節へ進む前に，表 1 の手順の元となる仮定 (7) の確率的意味を述べておく．どのようなマルコフ連鎖であっても定常状態確率が存在すれば，それらの比も存在する．そこで，γ_k を π_k と π_{k+1} の比と定義する．

$$\gamma_k = \pi_{k+1}/\pi_k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

π_k $(k = 0, 1, \ldots)$ が式 (3) で与えた時間平均という意味をもつことに注意すると，γ_k $(k = 0, 1, \ldots)$ は

$$\gamma_k = \frac{\text{状態 } k+1 \text{ に滞在する時間の総和}}{\text{状態 } k \text{ に滞在する時間の総和}}$$

と解釈することができる．

そこで，他の状態から状態 k に変化した時点 τ_n に注目する（図 3 参照）．系内客数過程のマルコフ性より，τ_n 以降の挙動は τ_n 以前の挙動とは独立となる．よって，2 節で述べた，同じ確率的規則に従う独立なサイクル $C_n(k)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が繰り返し起こることがわかる．その結果，γ_k は

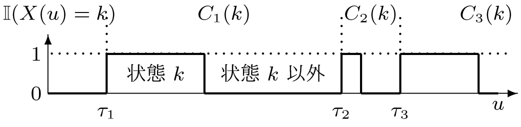

図 3　状態 k に注目した再生サイクル

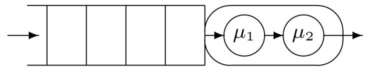

図 4　2 ステージサービスモデル

$$\gamma_k = \frac{\text{サイクル } C_n(k) \text{ 内での状態 } k+1 \text{ に滞在する時間の総和の平均}}{\text{サイクル } C_n(k) \text{ 内での状態 } k \text{ に滞在する平均時間}} \tag{10}$$

と解釈することができる．すなわち，表 1 の手順の元となる仮定 (7) は，式 (10) の右辺の比がどの状態 k $(k \geq 1)$ でも同一であると仮定することに他ならない．

4. 準出生死滅過程：2 変数マルコフ連鎖への拡張

本節では，前節の例を拡張した 2 ステージサービスモデルを考察する（図 4 参照）．すなわち，それぞれの客は率 μ_1 ならびに率 μ_2 の指数サービスを連続して受けた後，システムを離脱すると仮定する．ここでサービスは非割り込みであり，二人の客が同時にサービスを受けることはない．

時刻 t $(t \geq 0)$ におけるシステムの状態を系内客数 $L(t)$ とサービスの状況 $S(t)$ の組 $(L(t), S(t))$ で表現する．定義より，系内客数 $L(t)$ は非負の整数値をとる．一方，$S(t)$ はステージ 1 のサービス中ならば 1，ステージ 2 のサービス中なら 2 とする．ただし，システムが空の場合は 0 としておく．モデルを構成する「部品」がすべて指数分布で与えられているため，$\{(L(t), S(t));\ t \geq 0\}$ は連続時間マルコフ連鎖をなす．図 5 はこの 2 ステージサービスモデルの状態遷移速度図である．以下では，この連続時間マルコフ連鎖は正再帰的であると仮定する[4]．

[4] 平均サービス時間は $1/\mu_1 + 1/\mu_2$ で与えられるため，$\lambda(1/\mu_1 + 1/\mu_2) < 1$ を仮定することと等価である．

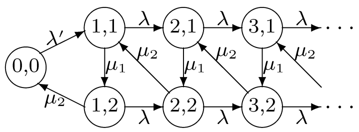

図 5　2 ステージサービスモデルの状態遷移速度図

定常状態確率 $\pi_{k,j}$ $(k=0,1,\ldots,\ j=0,1,2)$ を次式で定義する．

$$\pi_{k,j} = \lim_{t\to\infty} \Pr(L(t)=k, S(t)=j)$$

このとき，図 5 より以下の大域平衡方程式が得られる．

$$\begin{aligned}
&\lambda'\pi_{0,0} = \mu_2\pi_{1,2}\\
&(\lambda+\mu_1)\pi_{1,1} = \lambda'\pi_{0,0} + \mu_2\pi_{2,2}\\
&(\lambda+\mu_2)\pi_{1,2} = \mu_1\pi_{1,1}\\
&(\lambda+\mu_1)\pi_{k,1} = \lambda\pi_{k-1,1} + \mu_2\pi_{k+1,2}, \quad k=2,3,\ldots\\
&(\lambda+\mu_2)\pi_{k,2} = \lambda\pi_{k-1,2} + \mu_1\pi_{k,1}, \quad k=2,3,\ldots
\end{aligned}$$

客は一人ずつ到着し，サービスも一人ずつ行われるため，系内客数の変化は 1 回の遷移で高々 ±1 である．そこで，系内客数の値が等しい状態をグループ化して，システムの状態を

$\{(0,0)\} \cup \{(1,1),(1,2)\} \cup \{(2,1),(2,2)\} \cup \cdots$

のようにグループ分けする．このとき，無限小生成作用素 $\boldsymbol{Q}$ は次のような形で表現することができる．

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{0,0} & \boldsymbol{B}_{0,1} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots \\ \boldsymbol{B}_{1,0} & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{O} & \cdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \tag{11}$$

ただし

$$\boldsymbol{A}_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} -(\lambda+\mu_1) & \mu_1 \\ 0 & -(\lambda+\mu_2) \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_{1,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{B}_{0,0} = -\lambda', \qquad \boldsymbol{B}_{0,1} = \begin{pmatrix} \lambda' & 0 \end{pmatrix}$$

グループ単位で見たとき，1 回の遷移で移動できるグループは隣接しているグループに限られるため，2 ステージサービスモデルの無限小生成作用素 $\boldsymbol{Q}$ は 3 重ブロック対角行列となる．前節の M/M/1 の無限小生成作用素との類似性に注意する．一般に，2 変数マルコフ連鎖の一方の変数に注目したとき，1 回の遷移で高々 ±1 しか変化できないものを準出生死滅過程という．準出生死滅過程 $\{(L(t),S(t));\ t\geq 0\}$ では，$L(t)$ をレベル，$S(t)$ を相と呼ぶ．表 2 に式 (11) に現れる $\boldsymbol{A}_k$ $(k=0,1,2)$ の確率的意味をまとめておく．

表 2　$\boldsymbol{A}_k$ の (i,j) 要素がもつ確率的意味

$\boldsymbol{A}_0$:	相が i から j に変化し，レベルが 1 つ増加する率
$\boldsymbol{A}_1$:	非対角要素は相が i から j に変化し，レベルが変化しない率であり，対角要素は負であり，その絶対値は他の状態へ変化する率の総和に等しい
$\boldsymbol{A}_2$:	相が i から j に変化し，レベルが 1 つ減少する率

上記のグループ分けに合わせて定常状態分布を $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_0\ \boldsymbol{\pi}_1\ \cdots)$ とする．ただし $\boldsymbol{\pi}_0 = (\pi_{0,0})$，$\boldsymbol{\pi}_k = (\pi_{k,1}\ \pi_{k,2})$ である．このとき，大域平衡方程式 $\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}$ をグループ単位で書き下すと以下のようになる．

$$\boldsymbol{\pi}_0\boldsymbol{B}_{0,0} + \boldsymbol{\pi}_1\boldsymbol{B}_{1,0} = \boldsymbol{0} \tag{12}$$
$$\boldsymbol{\pi}_0\boldsymbol{B}_{0,1} + \boldsymbol{\pi}_1\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{\pi}_2\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{0} \tag{13}$$
$$\boldsymbol{\pi}_{k-1}\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{\pi}_k\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{\pi}_{k+1}\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{0},\ k=2,3,\ldots \tag{14}$$

2 変数マルコフ連鎖の定常状態確率 $\boldsymbol{\pi}_k$ $(k=0,1,\ldots)$ に対しては，一般に

$$\boldsymbol{\pi}_{k+1} = \boldsymbol{\pi}_k\boldsymbol{R}_k, \quad k=0,1,\ldots$$

となるような率行列 $\boldsymbol{R}_k$ $(k=0,1,\ldots)$ が存在する．率行列 $\boldsymbol{R}_k$ は前節の最後で議論した γ_k と同様，確率的な意味をもっている．すなわち，$\boldsymbol{R}_k$ の (i,j) 要素は，状態 (k,i) $(k\geq 0)$ から出発して他のレベルへ遷移した後，再びレベル k へ戻ってくるまでのサイクル内において，状態 (k,i) に滞在した時間の総和の平均に対する状態 $(k+1,j)$ に滞在した時間の総和の平均の比で与えられる．

そこで，2 ステージサービスモデルの系内客数過程 $\{(L(t),S(t));\ t\geq 0\}$ の定常状態確率 $\boldsymbol{\pi}_k$ が，空間的に同質な部分において，以下の行列幾何形式解をもつと仮定する．

$$\boldsymbol{\pi}_{k+1} = \boldsymbol{\pi}_k\boldsymbol{R}, \quad k=1,2,\ldots \tag{15}$$

これは以下と等価であることに注意する．

$$\boldsymbol{\pi}_k = \boldsymbol{\pi}_1\boldsymbol{R}^{k-1}, \quad k=1,2,\ldots \tag{16}$$

式 (16) を式 (14) へ代入し，整理すると

$$\boldsymbol{\pi}_1\boldsymbol{R}^{k-2}\left[\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{R}^2\boldsymbol{A}_2\right] = \boldsymbol{0}, \quad k=2,3,\ldots$$

を得る．上式がすべての k $(k=2,3,\ldots)$ に対して成立するための十分条件は

$$\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{R}^2\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{O} \tag{17}$$

表 3　空間的に同質な準出生死滅過程の解析手順

1. 空間的に同質な部分で，行列幾何解 (15) を仮定 2. 率行列 $\boldsymbol{R}$ が満たす式を空間的に同質の部分の大域平衡方程式より導き，5.2 節で示す繰り返し計算により求める 3. 境界部分に対応する大域平衡方程式を行列幾何解を併用して解く

である．この行列の 2 次方程式は通常，数値的に求めることになるが（5.2 節参照），複数の解をもつことが知られており，定常状態分布を構成する $\boldsymbol{R}$ は，M/M/1 の場合と同様に，式 (17) の最小非負解で与えられる．

この時点で未知の量は $\boldsymbol{\pi}_0$ と $\boldsymbol{\pi}_1$ である．M/M/1 の場合と同様，これらは大域平衡方程式の同質でない部分に対応する式 (12)，式 (13) を用いて定めることができる．$\boldsymbol{\pi}_2 = \boldsymbol{\pi}_1\boldsymbol{R}$ を式 (13) に代入し，式 (12) と合わせて行列を用いて書き下すと

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\pi}_0 & \boldsymbol{\pi}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{0,0} & \boldsymbol{B}_{0,1} \\ \boldsymbol{B}_{1,0} & \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

を得る．さらに，確率の和が 1 であることから

$$1 = \boldsymbol{\pi}_0\boldsymbol{e} + \boldsymbol{\pi}_1\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{R}^{k-1}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\pi}_0\boldsymbol{e} + \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{e}$$

を得る．ただし $\boldsymbol{I}$ は単位行列であり，$\boldsymbol{e}$ はすべての要素が 1 である適当な次元の列ベクトルである．これらによって，$\boldsymbol{\pi}_0$ と $\boldsymbol{\pi}_1$ を一意に定めることができる．ここまでの手順を表 3 にまとめておく．

5.　準出生死滅過程の安定条件と R の計算法

5.1　安定条件

定常状態分布が存在するときシステムは安定と呼ばれる．M/M/1 の場合，システムが安定であるための条件は $\rho < 1$，すなわち $\lambda < \mu$ であった．これは，空間的に同質な部分において，系内客数が増加する率 λ よりも減少する率 μ の方が大きければシステムは安定という解釈ができる．言い換えると，ドリフト（流れの向き）$\lambda - \mu$ が負であることが安定条件である．

一方，準出生死滅過程の場合，レベル（系内客数）が増減する率は相に依存するためドリフトは自明ではない．仮にレベルが時間と共に大きくなっていくと，いずれ同質な部分に留まり続けることになるため，同質な部分における相の遷移だけに着目する．すなわち，以下の無限小生成作用素 $\boldsymbol{A}$ をもつマルコフ連鎖を考える．

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2$$

簡単化のため，以下では $\boldsymbol{A}$ が既約であると仮定する．同質な部分に留まり続けることで，相は時間と共に定常状態へ近づいていく．同質な部分における相の定常状態分布 $\boldsymbol{\eta}$ は次式を満たす正ベクトルである．

$$\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{\eta}\boldsymbol{e} = 1$$

相の分布が $\boldsymbol{\eta}$ で与えられるとき，レベルが一つ増加する率は $\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{e}$ であり，レベルが一つ減少する率は $\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{e}$ である（表 2 参照）．よって，ドリフトが負であるための条件は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{e} - \boldsymbol{\eta}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{e} < 0 \tag{18}$$

実際，式 (18) が成立するとき，行列幾何形式の定常状態確率 (16) が存在することが知られている．すなわち，式 (18) が成立するならば，式 (17) を満たす非負最小解 $\boldsymbol{R}$ の最大固有値は 1 未満であり，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{\pi}_k\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\pi}_1(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{e} < \infty$$

となる．

5.2　率行列 R の計算方法

率行列 $\boldsymbol{R}$ が満たす方程式 (17) の左辺第 2 項に現れる行列 $\boldsymbol{A}_1$ は逆行列をもち，$(-\boldsymbol{A}_1)^{-1}$ は非負行列となる．式 (17) の両辺に $(-\boldsymbol{A}_1)^{-1}$ を後ろから掛けて整理すると次式を得る．

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}_0(-\boldsymbol{A}_1)^{-1} + \boldsymbol{R}^2\boldsymbol{A}_2(-\boldsymbol{A}_1)^{-1}$$

上式を元に $\boldsymbol{R}$ を繰り返し計算で求めることができる．具体的には，初期値 $\boldsymbol{R}(0) = \boldsymbol{O}$ から始め，$n = 1, 2, \ldots$ に対して，繰り返し

$$\boldsymbol{R}(n) = \boldsymbol{A}_0(-\boldsymbol{A}_1)^{-1} + \boldsymbol{R}^2(n-1)\boldsymbol{A}_2(-\boldsymbol{A}_1)^{-1} \tag{19}$$

を計算すればよい．$\{\boldsymbol{R}(n); n = 0, 1, \ldots\}$ は要素ごとに値が増加する非負行列の列であり，その極限は

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{R}(n) = \boldsymbol{R}$$

となることが知られている．実際の計算では，各要素の値の変化が十分小さくなったとき，計算を終了する．なお，式 (19) には正数の加算と乗算しか含まれていないため，数値的に安定した繰り返し計算となっている．

6.　モデル例の紹介

準出生死滅過程は 2 変数マルコフ連鎖 $\{(L(t), S(t)); t \geq 0\}$ の特殊な例であり，レベル $L(t)$ は 1 回の遷移で高々 ± 1 しか変化しない．さらに，補助的な情報を

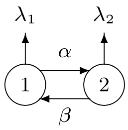

図 6　2 状態 MMPP

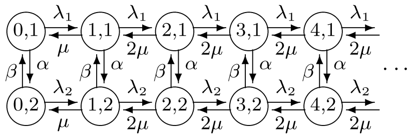

図 7　$\mathrm{MMPP}_2/\mathrm{M}/2$ の状態遷移速度図

保持する相 $S(t)$ の取りうる値は有限であり，かつ空間的な同質性があれば，行列幾何形式の定常状態確率が存在し，数値計算によって定常状態分布を得ることができる．この観察から，行列幾何解をもつ待ち行列モデル群が備えるべき（十分）条件は以下の通りである．

・モデルを構成する部品が指数分布

・単一到着，単一離脱

・多数の客がいるときの動作は客数と独立

一般に，指数分布を組み合わせて構成される分布を相型分布と呼び，アーラン分布や超指数分布などが代表例である．これらは客の到着間隔およびサービス時間を記述するために利用できる．また，主に到着過程に用いられるマルコフ型到着過程 (MAP) は，客の到着間隔に相関がある場合にも適用可能である．紙面の都合上，これらの詳細を示すことはできないので，興味のある読者は [1] を参照されたい．以下では，客の到着が MAP の特殊例であるマルコフ変調ポアソン過程 (MMPP) に従う待ち行列を取り上げ，読者に準出生死滅過程の適用範囲の広さを実感してもらおうと思う．

マルコフ変調ポアソン過程では，背後過程と呼ばれる有限状態をもつ既約な連続時間マルコフ連鎖 $\{S(t);\ t \geq 0\}$ の状態によって客の到着率が変化する．簡単化のため，以下では背後過程は二つの状態 1 と 2 をもつとする．図 6 は 2 状態 MMPP を図で表したものである．背後過程は状態 1 から状態 2 へ率 α へ遷移し，状態 2 から状態 1 へ率 β へ遷移する．背後過程が状態 i $(i = 1, 2)$ にあるとき，客は率 λ_i (≥ 0) で到着する．また，客のサービス時間はパラメータ μ の指数分布に従うと仮定し，サーバ数は 2 とする．この結果，システム全体でのサービス率は，一人の客がサービスを受けているときは μ，二人の客が同時にサービスを受けているときは 2μ となる．以下ではこの待ち行列を $\mathrm{MMPP}_2/\mathrm{M}/2$ と記す．

上記の $\mathrm{MMPP}_2/\mathrm{M}/2$ 待ち行列における系内客数 $L(t)$ と背後過程 $S(t)$ の組 $\{(L(t), S(t));\ t \geq 0\}$ は連続時間マルコフ連鎖をなし，状態遷移速度図は図 7 のようになる．ここでシステムの状態を，同質性をもたない境界部分 $\{(0,1), (0,2), (1,1), (1,2)\}$ と同質性をもつ $\{(k,1), (k,2)\}$ $(k = 2, 3, \ldots)$ でグループ分けすると，連続時間マルコフ連鎖 $\{(L(t), S(t));\ t \geq 0\}$ の無限小生成作用素 $\boldsymbol{Q}$ は 式 (11) の形で与えられる．ただし，$k = 0, 1, 2$ に対して

$$a_k = \lambda_1 + \alpha + k\mu, \quad b_k = \lambda_2 + \beta + k\mu$$

としたとき

$$\boldsymbol{A}_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} -a_2 & \alpha \\ \beta & -b_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 2\mu & 0 \\ 0 & 2\mu \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}_{1,0} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{B}_{0,0} = \left(\begin{array}{cc|cc} -a_0 & \alpha & \lambda_1 & 0 \\ \beta & -b_0 & 0 & \lambda_2 \\ \hline \mu & 0 & -a_1 & \alpha \\ 0 & \mu & \beta & -b_1 \end{array}\right), \quad \boldsymbol{B}_{0,1} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{array}\right)$$

である．この例からわかるように，複数サーバをもつ待ち行列モデルの場合，すべてのサーバが稼働中でない状態が境界部分に相当し，すべてのサーバが稼働しいている状態では空間的な同質性をもつ．

7.　おわりに

本稿では，M/M/1 の系内客数過程を表現する出生死滅過程を自然な形で拡張した，準出生死滅過程を紹介した．客の到着過程ならびにサービス時間が指数分布の組合せによって構成される待ち行列モデルは非常に多岐にわたり，組み合わせる指数分布の数を増やすことで，非常に精緻なモデルを構築することも可能である．これらのモデルの多くは，系内客数過程を準出生死滅過程と呼ばれる特殊な構造をもつ連続時間マルコフ連鎖で表現でき，行列幾何形式の定常状態確率をもつ．興味をもたれた読者は [1, 2] を参照されたい．

参考文献

[1] 牧本直樹，待ち行列アルゴリズム—行列解析アプローチ—，朝倉書店，2001.

[2] 滝根哲哉，構造化されたマルコフ連鎖と待ち行列，システム／制御／情報，vol. 43, no. 3, pp. 135–140, 1999.

