

生産システムの確率モデルと最適化

山下 英明

生産システムは、加工時間のばらつき、生産要求の変動等の不確定要素を伴うので、一般に確率モデルを用いて解析される。しかし、この種の確率モデルにおいて、生産システムの評価尺度が設計パラメータの陽な関数として得られるのは単純なモデルに限られ、生産システムの最適化を難しくする一因となっている。本稿では、まず基本的な生産システムについて、その特徴をどのように確率モデルに表現するかについて述べる。次に、システムの評価尺度が陽に求められる場合についての最適化の例を紹介し、最後にシミュレーションでしか評価尺度を求められないシステムにも適用できるサンプルパス最適化法について解説する。

キーワード：生産システム、確率モデル、待ち行列ネットワーク、サンプルパス最適化

1. はじめに

生産システムを設計、管理するうえで重要となる評価尺度には、次のようなものが考えられる。

スループット：単位時間あたりに生産される完成品数

平均仕掛時間：仕掛品がシステム内で費やす平均時間

平均中間在庫量：システム内の平均仕掛品個数

生産リードタイム：注文が発生してから完成品が引渡されるまでの時間

稼働率：全期間中で、機械が正常な状態で仕掛品を加工している時間の割合

これらの評価尺度にはトレードオフの関係が存在する。たとえば、受注生産を行うシステムにおいて、生産リードタイムを小さくするためには機械の台数や仕掛品バッファの容量を増加すればよいが、前者は機械の稼働率を低下させ、後者は中間在庫量の増加を招く。したがって、生産システムの設計・管理を行うためには、機械の個数や性能、バッファ容量などのシステムの設計パラメータの最適化を行うことが重要である。

生産システムは、加工時間のばらつき、加工機械の故障、部品の不足、生産要求の変動等の不確定要素を伴うので、生産システムの解析、最適化には一般に確率モデルが用いられる。特に、加工工程をサービス窓口、仕掛品を客にそれぞれ対応させ、未加工品の到着、加工時間、故障の発生、修理時間などの確率分布を定めることによって、生産システムを待ち行列モデルとして解析することが多い。しかし、待ち行列モデルにおいて生産システムの評価尺度が設計パラメータ

の陽な関数として得られるのは、単一窓口待ち行列や積形式解をもつ待ち行列ネットワークとしてモデル化できる単純な生産システムに限られ、生産システムの最適化を難しくする一因となっている。

本稿では、まず基本的な生産システムにおいて、加工時間のばらつきなどの不確実性や、受注生産、見込み生産等の生産指示方式をどのように確率モデルに表現するかについて述べる。次に、システムの評価尺度が陽に求められる場合についての最適化の例として、単一待ち行列や積形式解をもつ待ち行列ネットワークでモデル化できるシステムを紹介する。最後に、シミュレーションでしか評価尺度を求められないシステムにも適用できるサンプルパス最適化法について解説する。サンプルパス最適化法は、評価尺度の値を求めながらそれを最適にするパラメータを決めるという素朴な方法であるが、シミュレーションの過程が比較的簡単な漸化式で表現できるときは、評価尺度のサンプル値が設計パラメータの関数として表現でき、その最適化に既存の数理計画を適用できるという利点がある。ここでは、シミュレーションを行う際に共通の乱数を用いることの有用性や最適解の収束性についても触れる。

2. 生産システムの確率モデル

2.1 生産システムの構成要素

生産システムは、仕掛品を加工する工程と、部品、仕掛品、完成品を一時的に保有するバッファによって構成される。各工程における加工時間は、そのばらつきを表現するため、ある定められた確率分布に従うと仮定される。システムの解析に待ち行列理論を用いるときは、その取り扱いの容易さから、加工時間を指数分布やアーラン分布、超指数分布に代表される相型分布

やました ひであき
首都大学東京 大学院社会科学部経営学専攻
〒192-0363 東京都八王子市南大沢 1-1

に従うと仮定することが多い。また、生産システムには故障やチョコ停（ちょっとしたトラブルによる停止）が付き物である。これをモデル化するには二通り方法がある。一つは、故障時間を加工時間に組み入れ、加工時間のばらつきによって故障を表現する方法である。もう一つの方法は、故障と修理を直接表現する方法で、機械の故障が発生すると、その機械は修理が終了するまで仕掛品を加工することができない。待ち行列理論を適用した多くの研究では、上述の理由から、故障間隔時間（修理が終了してからその機械が次に故障するまでの時間）と修理時間は互いに独立であり、それぞれ指数分布や相型分布に従うと仮定されている。一方、スペースの制約や保管費用の抑制のため、工程間のバッファに保有できる仕掛品在庫量の上限を制限する場合、その上限値をバッファの容量と定義する。下流の工程の仕掛品在庫量がバッファ容量に達すると、上流工程の加工が停止するブロッキングが発生し、スループットの低下に繋がるので、適切なバッファ容量を決定することは重要である。

2.2 生産指示方式

注文や在庫量によって生産調整を行わず、できる限り多くの製品を生産する方式を、フル稼働生産 (Product at line-capacity) と呼ぶ。フル稼働生産方式では、スループットや平均中間在庫量が主な評価尺度となる。モデル化では、最上流のステージに常に加工すべき未加工品が存在すると仮定する。図1のようなフル稼働生産システムの場合、工程2の加工時間を窓口のサービス時間、仕掛品バッファの容量を待ち行列の容量、工程1の加工時間を客の到着間隔に対応させると、このシステムは単一待ち行列モデルになる。平均中間在庫量は、待ち行列の平均システム内人数に対応する。

注文があって初めてその製品の生産を開始する方式を、受注生産 (Product to order) と呼ぶ。生産リードタイムと平均中間在庫量が主な評価尺度となる。受注生産方式では、注文の発生時にシステム外部から客が到着すると考えると、待ち行列モデルになる。図2のような受注生産システムの場合、工程1、工程2の加工時間をそれぞれ窓口1、窓口2のサービス時間、仕掛品バッファの容量を待ち行列2の容量、未加工品バッファの容量を待ち行列1の容量、注文（未加工品）の到着間隔時間を客の到着間隔に対応させると、2ノードの直列型待ち行列システム (Tandem Queue) になる。生産リードタイムは、待ち行列システムにおける客の滞在時間に対応する。

所定の在庫量を維持すべく生産を行う方式を、在庫

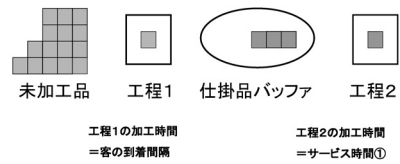


図1 フル稼働生産システム

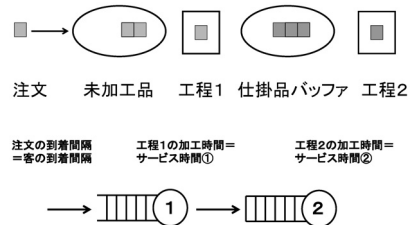


図2 受注生産システム

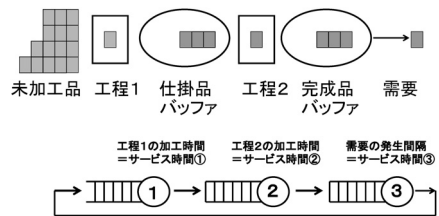


図3 在庫補充生産システム

補充生産 (Product to stock) と呼ぶ。図3のような在庫補充生産システムでは、需要が発生し完成品在庫が減少すると、在庫量を維持するため工程2に生産指示が出される。これによって仕掛品在庫が減少し、工程1に生産指示が伝播する。ここでは、バックオーダーは扱わず、完成品の在庫がないときに発生した需要は失うとすると、平均仕掛品在庫量、平均完成品在庫、品切れ確率などが評価尺度となる。待ち行列モデルでは、完成品在庫を処理するサービス窓口を考え、そのサービス時間として需要の発生間隔を対応させる。図3の工程1、2の加工時間をそれぞれ窓口1、2のサービス時間、需要の発生間隔を窓口3のサービス時間、仕掛品在庫量と完成品在庫量の和の上限をシステム全体の客の数に対応させると、3ノードの循環型待ち行列システム (cyclic queue) になる。また、ノード2、3のバッファ容量を有限にし、仕掛品在庫量と完成品在庫量の上限を制限することもできる。発生した需要が品切れとなる確率は、ノード3に客がない確率となる。

一方、バックオーダーを扱う場合は、品切れ確率の代

わりに、バックオーダー量（納品待ちの需要数）、バックオーダーの待ち時間が評価尺度となる。このとき、ノード3は客がいなくても常にサービスを行うこととし、負の客の待ち行列長によってバックオーダーの量を表現する。バックオーダーの待ち時間は、ノード3の負の客の滞在時間に対応する。これにより、システム内の客数は一定でなくなり、待ち行列モデルは工程1の加工時間を客の到着間隔とした2ノードの直列型待ち行列システムとなる。在庫補充生産方式のモデルは、カンバン方式などの制御方式にも対応することができる。

2.3 多品種生産システム

特定の品種の生産のための専用ラインを設置する場合など単品種の生産を行う場合、すべての仕掛品がすべての工程で加工を受けるので、前小節で示したように直列型または循環型待ち行列システムでモデル化できる。しかし、生産システムの中には多品種の生産を行うものも多く、ジョブショップやFMS (Flexible Manufacturing Systems) などがその代表的なものである。ジョブショップは、工程を機能中心に配置し、異なる構成をもつ品種がそれぞれの加工順序に沿って工程を移動していくシステムである。一方、FMSは、多機能機械で構成されるシステムで、プログラム制御によって複数の品種を自動的に加工する。いずれの場合も、各工程は様々な種類の製品を加工し、また製品の種類によって移動する工程も異なる。このような多品種の製品を扱う生産システムは、一般に待ち行列ネットワークを用いてモデル化される。このとき、品種ごとに異なるクラスの客を定義し、客のクラスによって異なるサービス時間分布や経路を定義することによって、多品種に対応できる。

3. 待ち行列理論による最適化

3.1 単一待ち行列モデル

図1のような2工程から成るフル稼働生産システムのように、単一待ち行列でモデル化できる場合、その評価尺度が設計パラメータの陽関数として得られることが多く、この場合設計パラメータの最適化が可能となる。

例題1 受注生産システムの処理能力決定問題

一つの工程で受注生産を行うシステムを考える。注文の到着は平均 $1/\lambda$ のポアソン到着に従い、工程の加工時間は平均 $1/\mu$ の指数分布に従うと仮定する。いま、この工程の操業コストは工程の処理能力に依存し、単位時間あたり $w_1\mu$ 円で、注文待ちのコストが単位時間あたり w_2 円の時、工程の処理能力をどの程度にす

れば総費用（機械の操業コストと注文待ちコストの和）が最小になるだろうか。ただし、 λ は既知で、 $\mu > \lambda$ とする。

この生産システムは、2.2節で述べたようにM/M/1待ち行列モデルとしてモデル化できる。M/M/1待ち行列の平均待ち行列長は $\lambda/(\mu - \lambda)$ となることから、単位時間あたりの総費用を μ の関数として表すと

$$c(\mu) = w_1\mu + \frac{w_2\lambda}{\mu - \lambda}$$

となる。 $c(\mu)$ は μ の凸関数であるから、これを μ で微分して0とおくと、

$$\frac{d}{d\mu}c(\mu) = w_1 + \frac{-w_2\lambda}{(\mu - \lambda)^2} = 0$$

となり、 $c(\mu)$ を最小にする最適解 μ^* が以下のように求められる。

$$\mu^* = \lambda + \sqrt{\frac{\lambda w_2}{w_1}}$$

加工時間は相型分布の場合や2.1節で示した機械の故障が発生し修理時間がかかる場合も、それぞれM/PH/1, M/MAP/1の待ち行列でモデル化でき、設計パラメータの最適化が可能となる。

3.2 積形式解をもつ待ち行列ネットワークモデル

一般に2つ以上の工程から成る生産システムは、待ち行列ネットワークを用いてモデル化される。待ち行列ネットワークがある性質を満たせば、各ノードの客数の平衡状態確率分布は積形式解をもち、このとき評価尺度が設計パラメータの陽関数として得られるか、あるいは大規模な連立方程式を解くことなく厳密に数値計算することができる。

積形式解をもつ待ち行列ネットワークの例として、まず外部から客の到着がある開放型ジャクソン・ネットワークを紹介する。ノード数を J 個とし、以下を仮定する。

- ネットワーク外部から各ノードへの客の到着は、独立なポアソン分布に従う。ノード i への到着率を γ_i ($i = 1, \dots, J$) とする。
- 各ノードの客のサービス時間は独立な指数分布に従う。ノード i に客が x_i 人いるときのサービス率を $\mu_i(x_i)$ とする。
- サービスを終了した客の移動先は確率的に決定する。ノード i の客がノード j へ移動する確率を $r_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, J$)、ネットワークから退去する確率を $r_{i,0}$ とする。ただし、 $\sum_{j=0}^J r_{i,j} = 1$ 。
- 各ノードの容量は無限とする。

また、 λ_i をトラヒック方程式

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^J \lambda_j r_{j,i} \quad (i = 1, \dots, J)$$

の解とする。 λ_i は単位時間あたりの客のノード i への流入率と解釈できる。このとき、各ノードの客数 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_J)$ の平衡状態確率について、以下の定理が成り立つ。

定理 1

$$P[Y_i = n] = P[Y_i = 0] \lambda_i^n / M_i(n)$$

ただし $M_i(n) = \mu_i(1) \cdots \mu_i(n)$, $n = 1, 2, \dots$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P[Y_i = n] = 1$$

とし、次式が成り立つと仮定する。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^n}{M_i(n)} < \infty$$

このとき、 \mathbf{x} の平衡状態確率 $\pi(\mathbf{x})$ は積形式解をもつ。

$$\pi(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^J P[Y_i = x_i]$$

例えば、図 2 のような直列型待ち行列において、客の到着が平均 $1/\lambda$ のポアソン分布、ノード 1, 2 のサービス時間がそれぞれ平均 $1/\mu_1, 1/\mu_2$ の指数分布に従うとし、待ち行列の容量に制限がないものとする、このシステムは上記の仮定を満たし、各ノードの客数の平衡状態確率 $\pi(x_1, x_2)$ は以下のような積形式となる。

$$\pi(x_1, x_2) = (1 - \rho_1)(1 - \rho_2) \rho_1^{x_1} \rho_2^{x_2}$$

ただし $\rho_i = \lambda_i / \mu_i, i = 1, 2$

また、外部からの客の到着がなく（すなわち $\gamma_i = 0, i = 1, \dots, J$ ）、系内人数が一定（ N 人とおく）である閉鎖型ジャクソン・ネットワークにおいても、定理 1 と同様な定理が成り立つ。

定理 2

$$P[Y_i = n] = P[Y_i = 0] \lambda_i^n / M_i(n)$$

ただし $M_i(n) = \mu_i(1) \cdots \mu_i(n)$, $n = 1, \dots, N$

とするとき、 \mathbf{x} の平衡状態確率 $\pi(\mathbf{x})$ は積形式解をもつ。

$$\pi(\mathbf{x}) = C^{-1} \prod_{i=1}^J P[Y_i = x_i]$$

ただし C は正規化定数

閉鎖型ネットワークの正規化定数や平均待ち行列長、各ノードのスループットなどの評価尺度を効率良く計算

するための方法として、たたみこみ法、平均値解析法等が提案されている（例えば、[1] を参照）。

ジャクソン・ネットワークは、客のクラスが単一であること、サービス時間が指数分布に従うこと、先着順サービスであることを仮定している。一方、複数クラスの客が存在し、各クラスの客のサービス時間がそれぞれ異なる分布に従う場合でも、対称型と呼ばれるサービス規律であれば、積形式解が存在する場合は知られている（例えば、[9] を参照）。この種の待ち行列ネットワークは、多品種生産システムにも適用できるメリットがあるが、先着順サービスが含まれないので、生産システムの解析にはあまり用いられない。

例題 2 在庫補充生産システムの在庫量上限決定問題

図 3 のような 2 工程から成るバックオーダーのない在庫補充生産システムを考え、仕掛品、完成品の在庫量の和の上限を L とする。また、工程 1, 2 の加工時間はそれぞれ平均 $1/\mu_1, 1/\mu_2$ の指数分布に従い、需要の発生は平均 $1/\lambda$ のポアソン分布に従うと仮定する。いま、仕掛品在庫、完成品在庫の単位時間あたりの在庫維持費用をそれぞれ w_1, w_2 円、需要が発生したとき完成品在庫がなかったときの機会損失を 1 需要あたり w_3 円とする。このとき、総費用（在庫維持費用と機会損失の和）を最小にするには、在庫量上限 L をいくつに設定すればよいか。

この在庫補充生産システムは、すべてのサービス時間が指数分布に従う循環型待ち行列システムとなり、閉鎖型ジャクソン・ネットワークに含まれる。客数分布の平衡状態確率から、仕掛品、完成品の平均在庫量（＝ノード 1, ノード 2 の平均人数）と機会損失率（＝ノード 3 が空である確率と λ の積）を計算することが可能である。この問題において、 $w_1 = w_2 = 1, w_3 = 10, \lambda = 1.0$ として与え、 $\mu_1 = \mu_2 = 0.9$ と $\mu_1 = \mu_2 = 1.1$ の 2 つの場合において、 L を変化させながらコストを

表 1 総費用を最小にする在庫量上限の最適化

μ_1, μ_2	L	在庫維持費	機会損失費	総費用
0.9	1	0.655	6.897	7.552
	2	1.305	5.347	6.652
	3	1.949	4.420	*6.369
	4	2.588	3.804	6.392
	5	3.222	3.365	6.587
	6	3.851	3.037	8.888
1.1	1	0.677	6.452	7.129
	2	1.361	4.680	6.041
	3	2.057	3.612	5.669
	4	2.744	2.914	*5.658
	5	3.444	2.412	5.856
	6	4.150	2.037	6.187

計算し、最適な L を求めた結果を表 1 に示す。 μ_1, μ_2 が 1.1 の場合は、どの L に対しても 0.9 のときより在庫維持費が大きく、機会損失費が小さい。また、 L を増加したとき、 μ_1, μ_2 が 1.1 の場合、より多くの機会損失費を削減できるので、在庫量上限の最適解 N^* が大きくなるのがわかる。

4. サンプルパス最適化

積形式解をもつ待ち行列ネットワークにおいても、大規模なシステムでは評価尺度を求める計算は大変である。また、生産システムが有限バッファをもち、ブロッキングが発生するような場合、対応する待ち行列ネットワークは一般に積形式をもたない。この場合でも、加工時間が指数分布や相型分布に従うのであれば、大域的平衡状態方程式を解いて平衡状態確率を求めることができるが、システムが中規模であってもその状態数が膨大となり、実際に平衡状態方程式を解くことは現実的ではない。

そこで、本節では設計パラメータをシミュレーションに基づいて最適化する方法の一つである、サンプルパス最適化法 [7] を紹介する。サンプルパス最適化法は、シミュレーションに用いられるサンプル (乱数列) を固定し、そのもとで得られる評価尺度を最適にするパラメータを決定する方法である。

4.1 定式化

$f_N(\theta)$ を θ をパラメータとする確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}(\cdot, \theta))$ 上の確率変数とし、あるサンプル $\omega \in \Omega$ に対する $f_N(\theta)$ の実現値を $f_N(\omega; \theta)$ と書く。ここで、 θ の制約集合 $S \subset \mathcal{R}^n$ のもとで、評価尺度

$$F(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(\omega; \theta) \quad (1)$$

の値を最大にする最適化問題 (P) を考える。

$$\begin{aligned} \max_{\theta} F(\theta) &= \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(\omega; \theta) \\ \text{s.t. } &\theta \in S \end{aligned}$$

一般にシミュレーションによって $F(\theta)$ の厳密な値を求めるのは困難なので、サンプルパス最適化法では、この関数を固定したサンプル $\bar{\omega} \in \Omega$ のもとでのシミュレーションによって近似する。すなわち、

$$F_N(\theta) = f_N(\bar{\omega}; \theta)$$

として、十分大きな N に対して、問題 (P_N)

$$\begin{aligned} \max_{\theta} F_N(\theta) &= f_N(\bar{\omega}; \theta) \\ \text{s.t. } &\theta \in S \end{aligned}$$

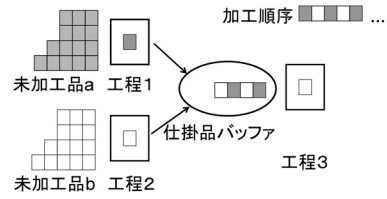


図 4 ジョブショップ型生産システム

の最適解を元の問題 (P) の近似的な最適解とみなす方法である。

$\omega \in \Omega$ は生産システムにおける加工時間や注文の発生間隔などのサンプルに相当し、このサンプルが与えられたもとは、評価尺度の値 $F_N(\theta)$ を求めることは通常シミュレーションをすることに相当する。例えば、図 4 のような a と b の 2 種類の製品を加工するジョブショップ型生産システムを考える。製品 a は工程 1 で加工を受けたあと工程 3 で加工を受け、製品 b は工程 2 で加工を受けたあと工程 3 で加工を受ける。工程 1、工程 2 には常に未加工品が存在し、工程 3 のバッファ容量を工程 3 で加工中の仕掛品も含め B とする。工程 3 では、必ず製品を a, b, a, b, \dots の順に加工するものとする。これは、前工程あるいは系列工場から引き取る部品のばらつきを抑制するために、平準化生産と呼ばれる。また、工程 i ($i = 1, 2, 3$) で加工する j 番目の仕掛品の加工時間を $S_{i,j}$ と表し、その実現値 (サンプル) は逆関数法等で乱数系列を発生することによって、パラメータ θ の関数として与えられるとする。いま、工程 i から j 番目の仕掛品が退去する時刻を $D_{i,j}$ ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, N$) と表すと、

$$D_{1,j} = \max\{D_{1,j-1} + S_{1,j}, D_{3,2j-B-1}\}$$

$$D_{2,j} = \max\{D_{2,j-1} + S_{1,j}, D_{3,2j-B}\}$$

$$D_{3,2j} = \max\{D_{2,j}, D_{3,2j-1}\} + S_{3,2j}$$

$$D_{3,2j+1} = \max\{D_{1,j+1}, D_{3,2j}\} + S_{3,2j+1}$$

が得られる。より一般的には、各工程での加工順序と各仕掛品の加工経路が固定されたジョブショップ型生産システムにおいて、工程 i で j 番目に加工を受けた仕掛品が次に進む工程 $u(i, j)$ とその加工順序 $v(i, j)$ があらかじめ定められていると、各工程からの部品の退去時刻は以下の Lindley 型の漸化式で定められる。

$$D_{i,j} = \max\left\{D_{u^{-1}(i,j), v^{-1}(i,j)} + S_{i,j}, D_{i,j-1} + S_{i,j}, D_{u(i,j), v(i,j)-B_{u(i,j)}-1}\right\} \quad (2)$$

ただし、 B_i は工程 i のバッファ容量を表し、 $u^{-1}(i, j)$ 、 $v^{-1}(i, j)$ はそれぞれ $u(i, j)$ 、 $v(i, j)$ の逆関数、すなわち

工程 i で j 番目に加工を受けた仕掛品が直前に加工を受けた工程とその加工順序を表す。各退去時刻を用いるとスループット、平均仕掛品数等の評価尺度 $F_N(\theta)$ を表現できるので、 $F_N(\theta)$ を θ の関数として表現でき、問題 (P) の近似最適解を既存の数値計画法の手法で得ることができる。このように、サンプルパス最適化が有効に機能するためには、既存の数値計画法が扱うことができるよう、目的関数 $F_N(\theta)$ が θ の単純な関数として表現できることが望まれる。

4.2 分散減少法

本稿で扱う生産システムは、システムが離散状態を有し、並行して進行する異なる事象のうち、いずれかの事象が生じたときのみ状態が変化する離散事象システム (Discrete Event Systems) である。離散事象システムの解析手法の一つに一般化セミマルコフ過程 (GSMP: Generalized Semi-Markov Process) があり、システムの構造的な性質から挙動特性を明らかにすることができる [4, 5]。GSMP では、システムが非割り込み (一度実行された事象は中断されない) かつ可換 (事象が生起する順序を変えても実行可能な事象は変わらない) であるとき、単調性を満たすという。単調性は、式 (2) のような漸化式が $\min, \max, +$ の演算だけで表現できることに相当する。4.1 節のジョブショップ型生産システムは、漸化式が \max と $+$ の演算だけで表現できるので、単調性を満たしている。このことは、工程 1 と工程 2 の加工時間が変化しても工程 3 の加工順序は変化しないことから明らかである。これに対し、図 5 のような 3 ノードのネットワークにおいて、ノード 3 が客の先着順にサービスを行うと、ノード 1 とノード 2 の客のサービス終了順序によってノード 3 で行うサービス順序が異なることから、単調性は満たされない。

問題 (P_N) の最適解を求めるには、パラメータが異なる 2 つのシステムの評価尺度 $F_N(\theta_1)$ と $F_N(\theta_2)$ を比較することが必要である。このとき、2 つの評価尺度の差の分散 $V[F_N(\theta_1) - F_N(\theta_2)]$ は、シミュレーションに用いる乱数列の選び方に依存するが、正確な比較のためには、この分散は小さいほど望ましい。いま、それぞれのシステムの確率変数の実現値が、独立で同一な

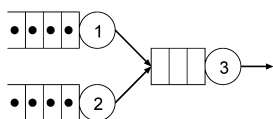


図 5 3 ノード待ち行列ネットワーク

一様乱数列から、逆関数法のように単調増加、右半連続の関数によって生成されるとき、以下の条件を満たす離散事象システムでは、両システムで同じ乱数 (共通乱数) を用いると 2 つの評価尺度の差の分散が最小になることが知られている [3]。

- 評価尺度が事象の生起時刻 (例えば退去時刻) の単調増加、右半連続の関数で、2 次モーメントが存在する。
- システムが、GSMP の意味での単調性を満たす。具体的には、各工程での加工時間の実現値 $S_{i,j}$ をあらかじめすべて固定したもとで漸化式 (2) を実行し、 $D_{i,j}$ を求め、その結果から決まるシステムの評価尺度 $F_N(\theta)$ を最大にするパラメータ θ^* を求める。このようなアプローチにより、通常の手順のように毎回乱数系列を変えてシミュレーションを多数回行い、信頼区間に基づき評価基準の値を比較するよりも、比較的短時間のシミュレーション時間で最適なパラメータを求めることができる。

4.3 収束性

問題 (P) の最適解集合を P^* 、問題 (P_N) の最適解集合を P_N^* とすると、一般には式 (1) の各点収束だけでは P_N^* が P^* に収束することは保証できない。しかし、通常はサンプルを固定したもとで、十分長いシミュレーション結果を最適化することによって、真の最適解に近いパラメータを得ることができそうである。実際、(a) F_N の一様収束性、あるいは (b) F_N の凸性 (最大化問題であれば凹性) のもとで、近似最適解が真の最適解となることが言える [7]。また、3.2 節の在庫上限の最適化の例のように、(c) 設計パラメータが離散変数の場合は、十分大きな N に対して近似最適解が真の最適解となることはほぼ明らかである。

例題 3 ジョブショップの平均サービス時間配分問題

図 6 のような a, b, c の 3 種類の製品をフル稼働生産するジョブショップ型生産システムを考える。各工程の加工時間は指数分布に従うものとし、工程 i ($i = 1, \dots, 5$) の平均加工時間を $1/\mu_i$ とおく。製品 a は工程 1, 3, 5 の順に、製品 b は工程 1, 2, 4, 5 の順に、製品 c は工程 2, 3, 4 の順に加工を受ける。各工程における製品

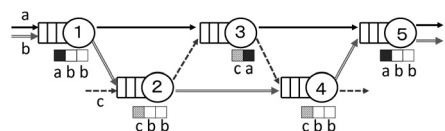


図 6 加工順序と経路が固定されたジョブショップ生産システム

表2 平均サービス時間配分の近似最適解

i	サンプル 1			サンプル 2		
	$1/\mu_i$	$P_i(4)$	$P_i(0)$	$1/\mu_i$	$P_i(4)$	$P_i(0)$
1	2.076	1.000	0.000	2.062	1.000	0.000
2	1.827	0.485	0.000	1.828	0.476	0.000
3	2.718	0.136	0.081	2.733	0.141	0.080
4	1.514	0.079	0.139	1.510	0.075	0.135
5	1.865	0.154	0.173	1.866	0.156	0.175
TH	0.4843			0.4852		

の加工順序は、図6のように固定されている。工程1, 工程2には常に未加工品が存在し、各工程のバッファ容量はすべて4とする。いま、操業コストの関係で平均加工時間の総和が10.0以内に制約されているとき、スループットを最大にするには各工程の平均加工時間をどのように設定すればよいか。

平均サービス時間の近似最適解を、サンプルパス最適化により求める。スループット最大化は、退去時刻の最小化と等価であるので、

$$\begin{aligned} \min_{\mu} \quad & D_{5,N}(\mu) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^5 1/\mu_i = 10.0 \\ & \mu_i \geq 0, i = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

の最適解を求めればよい。サンプルパス（一様乱数 $\omega_{i,j}$ の列）を固定し、逆関数法によって工程 i での j 番目の加工時間を求めると

$$S_{i,j} = -\frac{1}{\mu_i} \log \omega_{i,j}$$

となり、各工程での仕掛品の退去時刻は、漸化式(2)によって求められるので、 $D_{5,N}(\mu)$ は区分的に線形な関数となる。この種の問題は、多数の制約条件を有する線形計画問題に変換して解くことができる（詳しくは[8]を参照）。

$N = 60,000$ とし、2種類のサンプルパスを用いて平均サービス時間配分の近似最適化を求めた結果を表2に示す。 $P_i(4), P_i(0)$ は、それぞれ工程 i 内の仕掛品数が4および0である確率である。サンプルが異なると、僅かではあるが平均サービス時間の最適解やスループット (TH) に差が生じている。より精度を高めるためには N を増加させる必要がある。

5. おわりに

本稿では、基本的な生産システムについて、モデル化

と設計パラメータの最適化の手法について述べた。これらの手法は、待ち行列理論を用いるものと、シミュレーションを用いるものに大別される。前者の研究について最初に体系的にまとめたのはBuzacott[2]であり、その後も多くの研究がなされてきた。最近の成果については[6]などにまとめられている。一方、シミュレーションを用いる手法として紹介したサンプルパス最適化は、比較的簡単に最適パラメータの近似解を求めることができ、複雑な生産システムに対して有力な方法である。実際、ジャスト・イン・タイム生産システムのようなカンバンで制御を行う在庫補充生産システムや、自動搬送車 (AGV) によって仕掛品の搬送を行う生産システムなど、複雑な制御が必要なシステムにも適用されている。しかし、サンプルパス最適化は、シミュレーションの長さや誤差の見積もり、近似最適化問題の有効な解法など、解決すべき点も多い。

参考文献

- [1] Buzacott, J. A., Shanthikumar, J. G. and Yao, D. D. "Jackson Network Models of Manufacturing Systems," in *Stochastic Modeling and Analysis of Manufacturing Systems*, D. D. Yao, ed., Springer-Verlag, New York, pp. 1-45, (1994).
- [2] Buzacott, J. A. and Shanthikumar, J. G. *Stochastic Models of Manufacturing Systems*, Prentice-Hall, New Jersey, (1993).
- [3] Glasserman, P. and Yao, D. D. "Some Guidelines and Guarantees for Common Random Numbers," *Management Science*, Vol. 38, No. 6, pp. 884-908, (1992).
- [4] Glasserman, P. and Yao, D. D. *Monotone Structure in Discrete-Event Systems*, Wiley-Interscience Publication, New York, (1994).
- [5] Glasserman, P. and Yao, D. D. "A GSMP Framework for the Analysis of Production Lines," in *Stochastic Modeling and Analysis of Manufacturing Systems*, D. D. Yao, ed., Springer-Verlag, New York, pp. 133-188, (1994).
- [6] Smith, J. M. and Tan, B. *Handbook of Stochastic Models and Analysis of Manufacturing Systems Operations*, Springer-Verlag, New York, (2013).
- [7] Robinson, S. M. "Analysis of Sample-Path Optimization," *Mathematics of Operations Research*, Vol. 21, No. 3, pp. 513-526, (1996).
- [8] 石塚陽, 山下英明, "サンプルパス最適化の離散的事象システムへの適用," *オペレーションズ・リサーチ*, Vol. 46, No. 4, pp. 195-201, (2001).
- [9] 紀一誠, 『待ち行列ネットワーク』, 朝倉書店, 2002.