

# 最適化技術が現場で真価を発揮するには

檀 寛成

最適化技術には、理論的な側面と、その理論を現場で実問題に適用する応用的な側面がある。基本的な最適化問題を解くための理論は広く研究されており、また優れた最適化ソルバの開発や計算機能力の発達などにより、実問題を解くための環境はかなり整っていると言える。しかしながら、最適化技術を実際に利用している現場は限定的ではないだろうか。そこで本稿では、個人的な経験を踏まえながら、最適化技術が現場で真価を発揮するにはどのようなことが必要かを考えてみたい。

キーワード：現場での最適化利用、最適化ソルバ、インタフェース

## 1. はじめに

筆者は 2001 年 4 月から 2006 年 3 月まで (株) 数理システム (現: (株) NTT データ数理システム) に勤務し、最適化に関する業務に従事した。そして 2006 年 4 月からは関西大学に所属している。

昨年、「関西支部シンポジウムで『異分野コミュニケーションによる最適化の広がり』というテーマで話をせよ」というお話をいただいた。そのとき最初に頭に浮かんだのが本稿のタイトルである。

会社員時代、さまざまな業種の皆さんと最適化に関する仕事をさせていただいた。しかし一方では、最適化という技術のポテンシャルからすると、もっと現場で出番があってよいのではないかとも思っていた。そのことは企業から大学に異動しても頭の片隅にずっとあったのだが、2012 年の OR 学会第 68 回シンポジウムでのテーマが「現場と理論の対話」ということで、その思いが必ずしも個人的なものではないということ強く認識した。

そこで本稿では、一個人が扱うには大きすぎるテーマであることは承知のうえで、(主に会社員時代に) 現場の方々から聞いたことを思い出しながら、最適化技術が現場でより使われるようになるためには何が大事なのかということを考えてみたい。

## 2. 低くなった「最適化の壁」

「最適化」という概念はかなり古くから存在したと思われるが、最適化の理論が体系的に研究されるようになったのは Dantzig 教授の単体法以降とって差し支

えないだろう。それ以来、諸先輩方は最適化技術をさまざまな問題に適用するとともに、最適化技術が現場で広く利用されるよう、「最適化を利用するための壁」を低くするために多くの努力を払ってこられた。

その重要なアプローチの一つが最適化ソルバの開発である。これまでに、商用・非商用を問わずさまざまなソルバが開発され、利用されている。また、1990 年代以降、コンピュータの計算能力が急速に向上したことも相まって、ソルバの求解能力は爆発的に向上している。そのあたりの事情は、ILOG CPLEX・Gurobi Optimizer の開発者 Bixby 教授の RAMP シンポジウムでの講演 [1] でも披露されている。

さらに、最適化計算に関わる金銭的成本も大きく低減している。オペレーションズ・リサーチ 1989 年 3 月号 [7] には、Bell 研究所が開発した内点法ソルバ KORBX の価格がハードウェア込みで 890 万ドル (当時のレート 120 円で換算すると 10 億 6,800 万円!) という記載がある。おそらく、この価格は (内点法の当時の評判を背景にして) 相当に強気な商売を仕掛けた故の結果であろうと想像するが、現在は商用のソルバでも数十万円から数百万円程度、アカデミックでの利用であれば無料というソルバも多数あることを思えば、入手コストは大きく低下していると言える。

また [10] によると、1970 年当時<sup>1</sup>、変数・制約数がいずれも 100 程度の LP を解くのに必要な計算コストが 2, 3 万円であるという記載がある (ちなみに、その計算に必要な計算時間は 2, 3 分程度だったとのこと)。筆者はその当時に知らないが、それと比べると現在は夢のような状況であると言えよう。

だん ひろしげ  
関西大学環境都市工学部  
〒564-8680 大阪府吹田市山手町 3-3-35

<sup>1</sup> 本文中にいつのことか明記されていないが、[10] の初版が 1970 年発行であるため、その当時のことであると思われる。

このように、最適化を現場で利用するための環境は近年劇的に改善されていると言える。

さらに、「最適化」という言葉を社会に浸透させる取り組みも見られる。「最適化 (optimization)」とほぼ同じ意味を持つ言葉として、「数理計画 (mathematical programming)」という言葉がある。どちらの言葉もこの分野の教科書の題名に広く使われており、最適化 (あるいは OR) に関わる人間からするといずれも違和感のない言葉だと言っていいだろう。ところが 2010 年、「数理計画」に関する国際的に最大の学会である Mathematical Programming Society (MPS) が、Mathematical Optimization Society (MOS) に改名するという出来事があった (ご存じの方も多いと思います)。その変更を提案する、MPS の会員に送られた手紙 (2010 年 3 月 22 日付) から (やや長くなるが) 一部を抜粋する：

..., we are considering a change of name from “Mathematical Programming Society” to “Mathematical Optimization Society.” The main reason is that the term “optimization” is by now strongly associated with our field and widely used, both by ourselves and by our scientific colleagues in other areas. The term “mathematical programming” is by contrast no longer well understood; its origins are unclear even to many MPS members....

確かに、筆者自身「数理計画」という言葉の由来をよく知らないし、ほかの研究領域や実務家の皆さんには「(数理) 最適化」という言葉のほうが親しみやすいかなと思う。このように、学会の名前を変えるところからも、「最適化の壁」を低くしようとする動きもみられる。

しかしながら、「最適化 (ないしは数理計画)」が社会に広く受け入れられているかということ、必ずしもそうではないと思う。ここで、筆者が聞いたことのある「現場の声」を紹介したい：

#### 現場の声 1

「最適化の本って、難しいですね」

……確かにそうなのかもしれない。もちろん、[3, 4, 6] などのように現場で使われることを意図とした (と思われる) 本も多数あるのだが、一般にこの分野の教科書は問題の理論的性質や問題を解くためのアルゴリズム

に焦点が当たっており、理論と実務のギャップを埋めるための図書は少ないのが現状ではないかと思う (もちろん、最適化の理論を理解するための教科書は極めて重要なのだが)。

### 3. まだ残る「最適化の壁」を取り除くには

前述のように、従来と比べて「最適化の壁」はかなり低くなっているし、またそのための努力も引き続き行われているわけだが、現場での最適化技術の利用が限定的であることからすると、まだ何らかの「最適化の壁」が残っているようである。

現場での実務に際して最適化問題を解く場合、個別の問題ごとに求解アルゴリズムを作成・実装することもあるだろうが、以下では、最適化問題を解く際に既存のソルバを使って問題を解く場合を想定する。最適化技術を現場へ導入する「入口」としては、そちらのほうがより簡易なためである。

さて、最適化技術を現場で利用するためにはどのような壁があるのであろうか？ 異論はさまざまあるであろうが、本稿では以下の 3 点に注目したい：

- 問題をモデル化する難しさ
- 最適化計算の結果を正しく理解する難しさ
- 解けない問題の存在

以下、これらの問題と、その解決策について私見を述べたい。

#### 3.1 問題をモデル化する難しさ

ソルバは複雑な求解アルゴリズムをうまくブラックボックス化し、ユーザに優れた求解環境を提供してくれる。しかし、ソルバに対する入力、すなわち問題をモデル化したモデルファイル、問題の特徴づけるデータファイルがなければ、まさに「宝の持ち腐れ」である。これを準備できるかどうか、最適化技術利用の一つの壁になりうる。ここでは、モデルを準備する難しさについて考えてみる<sup>2</sup>。

モデルを作成するには以下の二つのフェーズがある：

- (a) 最適化問題を定義する
- (b) 最適化問題を定式化する

これらは、字面は似ているが、中身はかなり異なる。(a) は、実際に解くべき最適化問題を認識・整理することであり、(b) はその問題を数学的に表現することである。

先に (b) について述べる。これに関しては、現場の

<sup>2</sup> なお、データの準備が簡単だというわけではない。むしろ、技術以外の問題 (現場の文化、個人情報保護、…) もあるので、モデルの準備より難しい面も多々ある。

ほうから

## 現場の声 2

「最適化問題の定式化の方法がよくわからない」

という話を聞く機会が少ない。しかし、参考になる情報はかなり準備されている。例えばオペレーションズ・リサーチ 2012 年 4 月号では「はじめよう整数計画」というタイトルの特集が組まれている。この中では、ソルバそのものの使い方の話や基本的な定式化技法がカバーされており、現場のユーザにとって必見といえる記事が満載である。また、この特集をまとめられた宮代先生の整数計画法に関する情報を集めた Web ページ [9] も非常に充実している。しかし、良質の情報が散発的に世に出ている状態であるので、現場の方々にとって一覧性を欠く状態かもしれない。また、定式化について定評のある書籍として [11] があるが、その(旧版の)和訳 [12] については現在絶版のようである。

一方、(a) は非常に難しい問題である。(b) を行うためには最適化問題が何らかの形で外部化(文章化)されている必要があるから、それに先んじる(a)では対象となるシステムを最適化の観点から十分に把握している必要がある。しかしながら、これは極めて難しい。例えば次のような問題が生じうるだろう：

- (a) の担当者が問題をはっきりと把握していない
  - － どのような制約条件が存在するのかが判然としないことが多い
  - － 目的関数が明らかでないことも多々ある
  - － 決定すべき変数すらわからない場合も
- (a) の担当者が細部にこだわりすぎたモデルを作ろうとする
  - － 「木を見て森を見ず」になりかねない

また、(a) の作業を行うのは基本的に現場の実務家であろうが、(b) の作業を行うのは、例えば最適化計算を受注する側(最適化計算を業務として行う企業や、現場を持つ企業と共同研究を行う大学・研究機関など)であることも多く、一般には(a)の担当者と(b)の担当者は異なってくるだろう。その場合には、(b)の担当者が(a)の担当者からヒアリングを行い、問題を定式化するということになるが、これも極めて難しい作業になる。例えば、

- (a) の担当者の頭の中にある問題を(b)の担当者が外部化できない
  - － 体系だったヒアリング方法があるわけではない

- (a) の担当者の説明は正しいのに(b)の担当者が問題を取り違える
  - － (b) の担当者が必ずしも業務に精通しているわけではない

といったことが考えられる。さらに、

- (b) の担当者が問題をねじ曲げてしまう
  - － (a) の担当者が解きたい問題が、ソルバで扱えないクラスの問題かもしれない

といったことも生じるかもしれない。

このようなことは、最適化に限らず、一般のシステム開発のプロジェクトにも当てはまることである。しかし、システム開発の現場で起きていること(例えば、某省庁がシステム開発に 50 億円以上を投じたにもかかわらず失敗した 1 件などは記憶に新しい)をみるに、なかなかよい解決策はないようである。

しかしながら、問題のモデル化の難しさを克服するうえでの一つの提案として、次のことを挙げたい：

### 提案 1

現場の担当者に定式化の意味をできるだけ理解してもらおう。専門家はそれを助ける努力をしよう。

「現場の声 1」でも書いたように、現場では「最適化=難しい」というイメージが先行しているようである。これは、最適化技術が単なるシステム開発的技術ではなく、数学的な技法であることも関係しているであろう。しかし、その数学的難しさを引き受けてくれるのがソルバなのであり、それを比較的手軽に利用できるようになった今、現場の方々が想像するよりも「難しさ」の壁は随分低くなっていると言ってよいのではないだろうか。そして、その壁を乗り越えるために必要なのが「定式化」であり、それを理解してもらえれば問題が解ける(ことを期待してソルバを利用することができる)ということを広く理解してもらう必要があるだろう。また、現場の担当者に定式化の意味を理解してもらえれば、(システム開発にありがちな)土壇場での大きな仕様変更(=問題の定義・定式化の変更)が生じる可能性はかなり低くなるのではないかと。

一方、専門家(大学・研究機関、最適化計算を業務として請け負う企業など)は、現場の方々が定式化の意味を理解するための手助けを(今まで以上に)していく必要があると思う。例えば、有益な技術的情報の整理・提供や大学・研究機関と現場を持つ企業での共同研究、類似例の紹介などの活動を進めていくことが必要であろう。

手元に古いオペレーションズ・リサーチ (OR 学会誌) が多数あるのだが、そこには「OR ワーカー」という言葉がよく登場する。これは「企業内で OR 的活動をする人々」という意味であろうが、これになぞらえるなら、現場に「最適化ワーカー」がいることが、実務で最適化を使うための必要条件ではないかと思う。

### 3.2 最適化計算の結果を正しく理解する難しさ

さて、前項の (a), (b) を経てモデル (とデータ) を準備できたとしよう。次に行うべきことは、以下の二つである：

- (c) ソルバで問題を解く
- (d) 得られた解を検証する

まず (c) について考えてみる。場合によっては、(c) を行っても最適解を得ることができない場合もあるだろうが、それについては次節で触れる。あるいは、(c) のためにはソルバのパラメータのチューニングなどが必要になるケースもあると思われる。最近のソルバで設定できるパラメータは非常に多岐にわたっており、最適化の専門家であってもその調整は難しいと思われる。ただ、デフォルト値でもかなりのパフォーマンスが出るようになってきているので、まずは特にパラメータ値の設定を変えずに解き、もしパフォーマンスに不満があるようであれば、ソルバの開発元や専門家に相談する、ということになるであろう。

次に (d) について考える。これについては、次の現場の声がすべてを代弁しているように思う：

#### 現場の声 3

「結局、答えはどうなったんですか？」

多くの場合、ソルバが求めた最適解はファイルに出力され、ユーザは必要な箇所に注目することで (d) を行うことになる。一般に、最適解ファイルは無機質な解の羅列であることがほとんどである。(b) を担当した人はそのファイルから意味のある情報を抽出することは可能であろうが、(a) を担当した人、あるいは最適化計算の結果を参考にして何らかの決断を下す人 (例えば現場のオペレーションに対して決定権を持つような人) にとっては、これは全くの苦行になるであろう。また、(b) の担当者にしても、解をわかりやすく表示する仕掛けがあれば、大いに助かるであろう。

そこで本稿では次のことを提案したい：

結果をわかりやすく表示するインタフェースを準備しよう。そしてそれを用いて現場に結果を説明し、理解を得よう。

このようなインタフェースは、(a), (b) を担当した人にとっては解の妥当性を判定したりするデバッグとしての機能を提供するし、現場のオペレーションの決定権を持つ人にとっては判断の材料を容易に入手するための機能を持つことにもなりうる。そして、ここで得られた情報を元に、必要があれば (a) や (b) に戻ってモデルの修正を行い、最終的に実用的な解を得ることを目指すことになる。

このようなインタフェースの開発は、最適化問題の求解アルゴリズムと直接の関係はないため、研究が広く進んでいる範囲ではないと思われる。しかしながら、最適化計算の業務を請け負う企業などでは広く行っていることであり (例えば研究発表会・企業事例交流会にその例を見つけることができる)、「最適化の壁」を低くするためには本質的なことである。今後、そのような事例の発信が広く行われることで、ほかの事例に対するヒントが蓄積されることが望ましい。

### 3.3 解けない問題の存在

ここまではソルバのいいところばかり書いてきたが、実際にはまだまだ解けない問題も多い。もちろん、上で述べたように以前と比べれば実用的な時間で解くことができる問題の範囲は格段に大きくなっている。しかし、時間の経過と共に解きたい問題の範囲が広がっていることもまた事実であろう。ソルバは現場にとって効果的なツールの一つであることは間違いないが、「万能薬」であるかのように神格化しすぎるのもよくない。特に、いいことばかりを並べすぎて現場のみなさんの信用を失うようなことがあると、それから先、最適化技術を積極的に使ってもらえることはなくなってしまおうであろう。事実、このような声を複数の方から聞いたことがある：

#### 現場の声 4

「最適化？ 昔使ったけど、うまくいった記憶はあまりないなあ」

このあたりの事情は、オペレーションズ・リサーチ 1977 年 6 月号にある茨木俊秀先生の文章 [5] が詳しい。やや長くなるが引用する：

整数計画法 (IP) の最初の組織的な解法が Gomory によって提案されてからはやくも 20 年近くたった。当初、ほとんどの組合せ最適化問題が IP に定式化できることが喧伝され、また Gomory の切除平面法のエレガントさからくるアルゴリズム面での楽観もあって、IP は万能薬であるかのようにもはやされたものである。しかし、具体的な適用例が増えるにしたがって、その計算効率の悪さが認識され、ばら色の時期はすぐ終わりをつけた。(中略) IP が線形計画法のように大規模な問題にも自由に適用される時代は、今後ともあり得ないとする悲観論が支配的である。

このような状況に対処するためには、「提案」などというのもおこがましいが

### 提案 3

- ソルバをさらに安定・高速なものにする
- ソルバの利用に際しては適用可能性を十分に検討する
- ソルバで求解できない問題に対して問題個別のアルゴリズムを構築する

などという基本的な営みを積み重ねていくよりほかないのであろう。筆者自身も少しでも貢献できるよう、努力していきたい。

実は、先ほどの茨木先生の文章には続きがある [5]:

IP に望み得る最終的な目標は、IP という標準的な形式をとおしても、個々の問題の難度を増加させることなく、必要最低限の計算量でその問題を解ける、ということであろう。IP の今後の進歩をまてば、この目標はかなり達成されるのではないかと筆者は楽観視している。

世界中の研究者・実務家の努力により、この「予言」は現実のものとなった。最適化技術の現場への浸透に関しても、同じようなことが起きることを強く願っている。

## 4. 発表を終えて…

関西支部シンポジウムでは、前節までのような内容(と次節の事例紹介)の話をさせていただいた。それを受け、フロアから次のような質問をいただいた:

「OR ワーカーになぞらえた『最適化ワー

カー』なる言葉が出てきていたが、OR ワーカーの活動は残念ながら失敗に終わったと言えるだろう。その原因はいくつかあるだろうが、一つには OR ワーカーが費用対効果のことを考えていなかったことが挙げられるのではないか。そして、そのことに対する反省を抜きにしては『最適化ワーカー』もうまくいかないのではないか」

正直なところ、当日はこの質問にあまりうまく答えられなかったように思うので、その後改めて考えたことを書かせていただきたい。

この質問、確かに指摘のとおりで、現場で最適化技術を使うにしても、それに必要なコストが回収できないようでは、プロジェクトとしては結局失敗になってしまうであろう(そしてそのような経験をした現場は、それ以降、最適化技術を使ってくれなくなる可能性が高い)。ただこのあたりの事情は、(上でも触れたように)一般のシステム開発と同じであろうし、またそれに対する特効薬もなさそうである。

しかし、「OR ワーカー」の時代の最適化技術と現在のそれとで異なる部分は、最適化計算に関する金銭的・時間的コストがかなり低くなったということである。そのことを「現場の声 4」のような意見をお持ちの方に知っていただかないことには、「もう一度最適化技術を使ってみようか」とはならないし、そのためには、最適化ワーカーの社内での力添えは大きなものになるのではないかと思う。

一方で、ご指摘のように、最適化ワーカーの方々にも「提案 3」で挙げた「適用可能性の十分な検証」に意識を払っていただく必要があるだろう。正直に告白すれば、発表当日の段階では「適用可能性」=「問題に対する最適解が実用的な時間で得られるかどうか」程度の意味で考えていたが、本稿執筆の時点では「適用可能性」の概念を「金銭的・時間的コストの検討」にまで広げる必要があるように考えている。ただ、コストの見積りは容易なことではないので、例えば問題の一部分から段階的に取り組むようなアプローチなどが必要になるだろう(実際、そのようなプロジェクトの進め方をしている現場は多いと思われる)。

## 5. 事例紹介

ここでは、上で述べたことを念頭に置きながら、筆者が関わっているグループで行っている「最適化技術の現場への応用」に関する研究の一端 [2] を紹介したい。

筆者は、現在、3D スキャナを用いて屋外構造物をスキャンするプロジェクトに関わっている。3D スキャナとは、対象物にパルスレーザを照射し、その反射光が戻ってくるまでの時間を計測することにより、対象物までの距離を計測することができる装置である。ここでは、三脚で据え置くような比較的大型の3D スキャナを想定している(図1)。パルスレーザは直進するから、スキャナ設置位置から直接見渡せる部分にしか照射されない。そのため、屋外構造物の全周を記録するためには、複数箇所から計測を行い、得られたデータを合わせ込む必要がある。

1回のスキャンには、数十分から1時間程度の時間を要する。したがって、時間的コストを削減するためには、計測回数を減らすことが大事である(問題1)。一方、一定の計測回数の下では、計測対象に関して得られるデータ量が最大になることが望ましい(問題2)。本研究では、写真測量などから作成した計測エリアの粗い3Dモデルを元に計測プランを作成することを提案している。具体的には、計測対象のまわりに計測候補点  $i \in I$  を適当な密度で敷き詰めるとともに、計測対象の表面を三角形  $j \in J$  に分割することで、上の二つの問題を次のように定式化している：

【問題 1】

$$\begin{cases} \text{minimize} & \sum_{i \in I} x_i \\ \text{subject to} & \sum_{i \in I} d_{ij} x_i \geq 1 \quad (\forall j \in J), \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad (\forall i \in I). \end{cases}$$

【問題 2】

$$\begin{cases} \text{maximize} & \sum_{i \in I, j \in J} a_{ij} x_i \\ \text{subject to} & \sum_{i \in I} d_{ij} x_i \geq 1 \quad (\forall j \in J), \\ & \sum_{i \in I} x_i \leq r, \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad (\forall i \in I). \end{cases}$$

ただし、定式化中の変数・パラメータ等は、  
[変数]

$$x_i := \begin{cases} 0, & i \text{ を計測点として採用しない} \\ 1, & i \text{ を計測点として採用する} \end{cases}$$

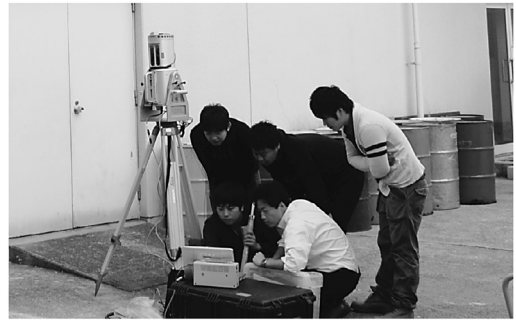


図1 3D スキャナによる計測の様子

[パラメータ]

$$d_{ij} := \begin{cases} 0, & j \text{ は } i \text{ から計測不可能} \\ 1, & j \text{ は } i \text{ から計測可能} \end{cases}$$

$$a_{ij} := \begin{cases} 0, & d_{ij} = 0, \\ i \text{ から } j \text{ を計測したときのデータ量}, & d_{ij} = 1, \end{cases}$$

$r$  := 可能な計測回数の上限

とする。なお、 $d_{ij}$ 、 $a_{ij}$  は粗い3Dモデルから算出し、 $r$  は実務上の制約や【問題1】の計算結果によって定める。ここで、【問題1】は集合被覆問題であることに注意する。

これらの問題を解けば(問題1または問題2の意味で)最適な計測候補点を得ることができるが、実はこの計測プランをそのまま用いることができるのはまれである。例えば、事前に作った粗い3Dモデルにはないオブジェクト(例えば木などの植生)が存在する可能性があるし、現場の変化により計測候補点にスキャナを設置できない場合もある。このような場合、3Dモデルや計測候補点を現場の状況に合わせて更新し、計測プランを再度計算しなくてはならない。

このような状況に対応するため、われわれは図2のようなインタフェースを作った。このインタフェースはタブレット上のブラウザで動作するもので、描画はWebGLを用いて行っている。このインタフェースでは、次のようなことが可能である：

- 最適化計算の実行
  - 現場にしながら(再)計算が可能
- 最適化計算の結果(計測点)の表示
  - 近くのオブジェクトから選ばれた計測点までの距離が表示されるため、スキャナ設置時に参考にできる
- オブジェクト/計測候補点の追加・削除
  - 現場の状況に合わせて修正し、再計算することが可能

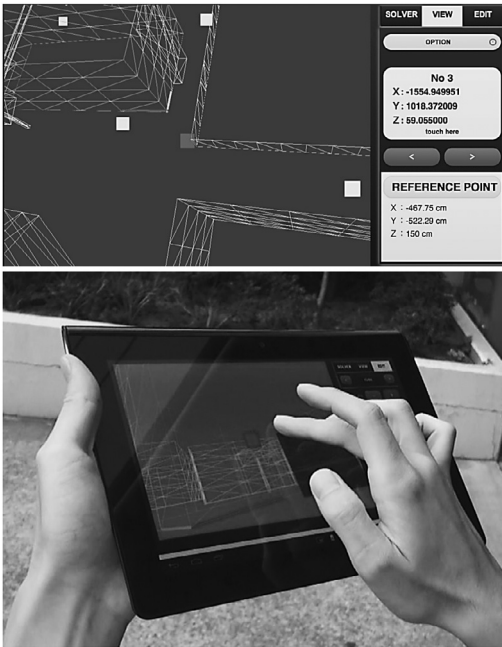


図2 作成したインタフェース  
(上:画面イメージ, 下:タブレット上での動作の様子)

なお、最適化計算については、サーバー側にソルバを用意しておき、クライアント（インタフェース）側から計算に必要なデータをサーバーに転送して最適化計算を実行するようになっていく。

このインタフェースにより、現場の状況を反映した計測プランを「現場」 (= on-site) にいながらにして再計算することができるようになった。また、最適な計測位置 (=最適解) をグラフィカルに表示できるようになり、スキャナを配置する位置を決定する作業が非常に容易になった。結果として、屋外建造物の3Dスキャンという「現場」 (=実務) に最適化技術を役立てることができるようになった。

## 6. おわりに

本稿で扱ったテーマは非常に大きなものであるため、筆者の力ではすべてを網羅して分析することは到底できないし、ここに書かせていただいたことに異論をお持ちの方も多くおられることと思う。是非意見交換などさせていただき、最適化が現場で使える技術であるための知見を蓄積していければと思う。

**謝辞** これまで一緒に最適化関連の仕事・研究をさせていただき、さまざまなご意見をいただいた「現場」の皆様へ感謝申し上げます。また、(株)数理システム在社時に最適化技術を現場で使うための勘所をご指導いただいた山下浩氏（現：(株)NTTデータ数理システム 顧問）、田辺隆人氏（現：同 取締役）に感謝いたします。

なお、5節で紹介したインタフェースは、日本学術振興会 科研費 24510239 の助成を受け、安室喜弘准教授（関西大学）、乾祐維氏（関西大学大学院）と共同で開発したものです。

**注意** 本稿は筆者の個人的な見解に基づくものであり、過去・現在の所属先の意見を代表するものではありません。

## 参考文献

- [1] R. Bixby, Z. Gu and E. Rothberg, “Presolve for Linear and Mixed-Integer Programming,” 第24回 RAMP シンポジウム論文集, 193–200, 2012.
- [2] H. Dan, Y. Yasumuro, T. Ishigaki, T. Nishigata and M. Imura, “3D-scan planning of outdoor constructions based on photogrammetric model and mathematical optimization,” *Proceedings of the 13th International Conference on Construction Applications of Virtual Reality 2013 (CONVR2013)*, 594–603, 2013.
- [3] 藤澤克樹, 梅谷俊治, 応用に役立つ50の最適化問題 (応用最適化シリーズ3), 朝倉書店, 2009.
- [4] 藤澤克樹, 後藤順哉, 安井雄一郎, Excelで学ぶOR, オーム社, 2011.
- [5] 茨木俊秀, “整数計画はなぜむずかしい?,” オペレーションズ・リサーチ, **22**, 352–358, 1977.
- [6] 久保幹雄, ジョア・ペドロ・ペドロソ, 村松正和, アドル・レイス, あたらしい数理最適化: Python 言語とGurobiで解く, 近代科学社, 2012.
- [7] 前田英次郎, “カーマーカー法の観客席から,” オペレーションズ・リサーチ, **34**, 117–118, 1989.
- [8] 宮代隆平 (特集幹事), “特集 はじめよう整数計画,” オペレーションズ・リサーチ, **57**, 174–217, 2012.
- [9] 宮代隆平, 整数計画法メモ, <http://www.tuat.ac.jp/~miya/ipmemo.html> (2014年1月18日確認).
- [10] 刀根薫, 増補 オペレーションズ・リサーチ読本, 日本評論社, 1991 (初版1970).
- [11] H. P. Williams, *Model Building in Mathematical Programming*, 5th Edition, Wiley, 2013.
- [12] H. P. ウィリアムス (前田英次郎 監訳, 小林英三 訳), 数理計画モデルの作成法, 産業図書, 1995.