ⓒオペレーションズ・リサーチ

主双対：ダ・ヴィンチ・コード
(Primal-dual Da Vinci Code)

岩本　誠一，木村　寛，藤田　敏治

映画「ダ・ヴィンチ・コード」ではフィボナッチ数が暗号として用いられている．この報告では，一対の主問題と双対問題を導入して，その最適解を交互に編むとこの暗号が得られることを示す．映画では 8 つの数字からなる暗証番号が中心的な役割を果たしている．本論文ではこの暗証番号が双対最適化理論の格好の教材でもあることを数学的に示す．主問題と双対問題の最適解の間に美しい関係—フィボナッチ相補双対性—が成り立つことを示している．

キーワード：フィボナッチ数列，主双対，動的双対，相補双対

1. はじめに

フィボナッチ数列は黄金比とともに古今東西「美と実用」に用いられてきている [1, 2, 3, 4, 5, 6]．映画「ダ・ヴィンチ・コード」（2006 年）では最初の 8 つのフィボナッチ数が暗号として使われている [7]．この暗号に着目して，本論文では最適化の双対理論を考える．結果として，暗号【ダ・ヴィンチ・コード】と数理計画問題の「鮮やかな双対関係」が浮き彫りになる．第 2 節では 4 変数の 2 次最小化（主）問題と最大化（双対）問題の対を紹介している．第 3 節では，この最適解の間にフィボナッチ相補双対性があることを示している．第 4 節では，主問題からこれと同値な 2 次計画問題を経由して双対問題を導いている．双対問題はラグランジュ乗数列が構成している．第 5 節では，動的計画法によって最適解を求めている．

2. ダ・ヴィンチ・コード

2.1 フィボナッチ数列

映画では冒頭のシーンで 10 桁の暗証番号

$$1\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 5\ \ 8\ \ 1\ \ 3\ \ 2\ \ 1$$

が現れている．この 10 個の数字を $1\ \ 1$ から始まって最後の 1 まで打ち込むと，フランス国立銀行の地下室の金庫が開いて，追跡劇が始まっている．この暗証番号は 8 つの数字からなる列

$$\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{5}\ \boxed{8}\ \boxed{13}\ \boxed{21}$$

である．これは，フィボナッチ数列（表 1）の第 1 項 $F_1 = 1$ から第 8 項 $F_8 = 21$ までの数列

$$\boxed{F_1}\ \boxed{F_2}\ \boxed{F_3}\ \boxed{F_4}\ \boxed{F_5}\ \boxed{F_6}\ \boxed{F_7}\ \boxed{F_8}$$

にほかならない [8]．

表 1　フィボナッチ数列 $\{F_n\}$

n	$\cdots$	0	1	2	3	4	5	6	7
F_n	$\cdots$	0	1	1	2	3	5	8	13

n	8	9	10	11	12	13	$\cdots$
F_n	21	34	55	89	144	233	$\cdots$

フィボナッチ数列 $\{F_n\}$ は 2 階線形差分方程式（3 項間漸化式）

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0, \quad x_1 = 1,\ x_0 = 0$$

の解として定まっている [1, 2, 3, 4]．

以下では 4 変数の主（最小化）問題と双対（最大化）問題の対[1]を解いて，その最小解と最大解に【ダ・ヴィンチ・コード】が現れることを示そう．

2.2 主問題

主問題 (primal problem) として次の最小化問題を

[1] これらの問題が双対になっていることを 3 節，4 節で示す．

いわもと　せいいち
九州大学名誉教授
〒 813–0012 福岡市東区香椎駅東 4–23–6
きむら　ゆたか
秋田県立大学システム科学技術学部
〒 015–0055 由利本荘市土谷字海老ノ口 84–4
ふじた　としはる
九州工業大学大学院工学研究院
〒 804–8550 北九州市戸畑区仙水町 1–1

考える（[9, pp. 90–93] 参照）.

主問題 (P_4)　定数 $c \in R^1$ を与える．最初の変数 y_0 が $y_0 = c$ に固定されているとき，以下の 4 変数 $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ の値を定めて，全平方和（総費用に相当する量）

$$
\begin{aligned}
g(y)=&(c-y_1)^2+y_1^2\\
&+(c-y_1-y_2)^2+y_2^2\\
&+(c-y_1-y_2-y_3)^2+y_3^2\\
&+(c-y_1-y_2-y_3-y_4)^2+y_4^2
\end{aligned}
$$

を最小にせよ．このとき，最小値 m_4 および最小（値を与える）点 $\hat{y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3, \hat{y}_4)$ を求めよ．この最小化問題は次のように表される．

$$
(\mathrm{P}_4)\quad
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad \sum_{n=1}^{4}\left[(c-\sum_{k=1}^{n} y_k)^2+y_n^2\right]\\
&\text{subject to} \quad y \in R^4.
\end{aligned}
$$

主問題 (P_4) は点

$$
\begin{aligned}
\hat{y}=&(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3, \hat{y}_4)\\
=&\frac{c}{34}\left(\boxed{21}, \boxed{8}, \boxed{3}, \boxed{1}\right)
\end{aligned}
$$

で最小値 $m_4 = 21/34c^2$ に達している．

2.3　双対問題

今度は，主問題に対する双対問題 (dual problem) として，次の最大化問題を導入しよう（[9, pp. 211–215, p. 220] 参照）．

双対問題 (D_4)　定数 c は主問題で与えたものとする．4 変数 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ の値を定めて，2 次の**量総貢献度** (total contribution)

$$
\begin{aligned}
g^*(\lambda)=&2c(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)\\
&-\left[\lambda_1^2+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)^2\right.\\
&\quad+\lambda_2^2+(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)^2\\
&\quad+\lambda_3^2+(\lambda_3+\lambda_4)^2\\
&\quad\left.+\lambda_4^2+\lambda_4^2\right]
\end{aligned}
$$

を最大にせよ．このとき，最大値 M_4 および最大点 $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*)$ を求めよ．

この最大化問題は次のように表される．

$$
(\mathrm{D}_4)\quad
\begin{aligned}
&\text{Maximize} \quad 2c\sum_{n=1}^{4}\lambda_n-\sum_{n=1}^{4}\left[\lambda_n^2+\left(\sum_{k=n}^{4}\lambda_k\right)^2\right]\\
&\text{subject to} \quad \lambda \in R^4.
\end{aligned}
$$

問題 (D_4) は 点

$$
\begin{aligned}
\lambda^*=&(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*)\\
=&\frac{c}{34}\left(\boxed{13}, \boxed{5}, \boxed{2}, \boxed{1}\right)
\end{aligned}
$$

で最大値 $M_4 = 21/34c^2$ に到達している．

3.　フィボナッチ相補双対性

主問題 (P_4) の最小解と双対問題 (D_4) の最大解の間には次の 3 つの関係が成り立っている．

1.（**双対性**）最小値と最大値が等しい：$m_4 = M_4$．共に初期値 c の 2 次関数で，その係数は相隣るフィボナッチ数の比 21/34 である．
2.（**2 段階フィボナッチ**）最小点 $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3, \hat{y}_4)$ と最大点 $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*)$ は共にフィボナッチ数列の後ろ向き 2 段跳びである．
3.（**相補フィボナッチ**）最小点と最大点を交互に編むと，後ろ向きフィボナッチ数列になる．

すなわち，最適解の交互列

$\hat{y}_1$	λ_1^*	$\hat{y}_2$	λ_2^*	$\hat{y}_3$	λ_3^*	$\hat{y}_4$	λ_4^*

は定数 $c/34$ を無視すれば，

F_8	F_7	F_6	F_5	F_4	F_3	F_2	F_1

となり，冒頭の【ダ・ヴィンチ・コード】が**後向き**に現れている．

この美しい関係を**フィボナッチ相補双対性** (Fibonacci complementary duality, FCD) という [8]．フィボナッチ相補双対性は一般の n 変数問題の対 (P_n) と (D_n) の間に成り立つ．また，主問題 (P_n) が与えられたとき，双対問題 (D_n) が導かれ，逆も導かれる．本論文では簡単のためそして【ダ・ヴィンチ・コード】との一貫性のゆえに 4 変数問題に限って議論する．

さて，主問題 (P_4) および双対問題 (D_4) の変数の順序を反転した問題の対を考えると，両反転問題の最適解の間には今度は**前向きの**フィボナッチ相補双対性が成り立つ．すなわち，反転主問題 (RP_4) の最小解と反転双対問題 (RD_4) の最大解の間には次の三位一体の関係が成り立っている．

$$
(\mathrm{RP}_4)\quad
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad \sum_{n=1}^{4}\left[y_n^2+\left(c-\sum_{k=n}^{4} y_k\right)^2\right]\\
&\text{subject to} \quad y \in R^4
\end{aligned}
$$

$$\text{(RD}_4\text{)}\quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & 2c\sum_{n=1}^{4}\lambda_n - \sum_{n=1}^{4}\left[\lambda_n^2 + \left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_n\right)^2\right] \\ \text{subject to} & \lambda \in R^4 \end{array}$$

1. (双対性) 最小値と最大値が等しい：$m_4 = M_4$. 共に初期値 c の 2 次関数で，その係数は相隣るフィボナッチ数の比 21/34 である.
2. (2 段階フィボナッチ) 最小点 $(\tilde{y}_1,\ \tilde{y}_2,\ \tilde{y}_3,\ \tilde{y}_4)$ と最大点 $(\lambda_1^\star,\ \lambda_2^\star,\ \lambda_3^\star,\ \lambda_4^\star)$ は共にフィボナッチ数列の前向き 2 段跳びである.

$$(\tilde{y}_1,\ \tilde{y}_2,\ \tilde{y}_3,\ \tilde{y}_4) = \frac{c}{34}\left(\ \boxed{1},\ \boxed{3},\ \boxed{8},\ \boxed{21}\ \right)$$

$$(\lambda_1^\star,\ \lambda_2^\star,\ \lambda_3^\star,\ \lambda_4^\star) = \frac{c}{34}\left(\ \boxed{1},\ \boxed{2},\ \boxed{5},\ \boxed{13}\ \right)$$

3. (相補フィボナッチ) 最大点と最小点を交互に編むと，

$$\boxed{\lambda_1^\star}\ \boxed{\tilde{y}_1}\ \boxed{\lambda_2^\star}\ \boxed{\tilde{y}_2}\ \boxed{\lambda_3^\star}\ \boxed{\tilde{y}_3}\ \boxed{\lambda_4^\star}\ \boxed{\tilde{y}_4}$$

は定数倍を無視すれば，

$$\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{5}\ \boxed{8}\ \boxed{13}\ \boxed{21}$$

になる.

すなわち，最適点の交互列の連比には冒頭の【ダ・ヴィンチ・コード】が現れている．特に $c = 34$ のとき，この交互列は【ダ・ヴィンチ・コード】そのものになっている.

4. 双対問題の導出

主問題 (P_4) から双対問題 (D_4) を導こう．主問題に対して新たな 4 変数ベクトル $u = (u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)$ を

$$\begin{aligned} u_1 &= c - y_1 \\ u_2 &= c - y_1 - y_2 \\ u_3 &= c - y_1 - y_2 - y_3 \\ u_4 &= c - y_1 - y_2 - y_3 - y_4 \end{aligned}$$

によって導入すると，(P_4) は 8 変数 4 線形制約下での 2 次計画問題

$$(\mathrm{P}_4')\quad \begin{array}{lll} \text{minimize} & \sum_{n=1}^{4}\left(u_n^2 + y_n^2\right) & \\ \text{subject to} & (1) & c - y_1 - u_1 = 0 \\ & (2) & c - y_1 - y_2 - u_2 = 0 \\ & (3) & c - y_1 - y_2 - y_3 - u_3 = 0 \\ & (4) & c - y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - u_4 = 0 \\ & (5) & (y,\ u) \in R^8 \end{array}$$

に同値である．任意の実行可能な (y, u) に対して

$$g(y) = \sum_{n=1}^{4}\left(u_n^2 + y_n^2\right)$$

が成り立つ.

さて，(P_4') の双対問題を導入しよう．いま (y, u) が実行可能解とすると，任意のラグランジュ乗数 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in R^4$ に対して

$$\begin{aligned} g(y) = &\sum_{n=1}^{4}\left(u_n^2 + y_n^2\right) \\ &+ 2\lambda_1(c - y_1 - u_1) \\ &+ 2\lambda_2(c - y_1 - y_2 - u_2) \\ &+ 2\lambda_3(c - y_1 - y_2 - y_3 - u_3) \\ &+ 2\lambda_4(c - y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - u_4) \end{aligned}$$

である．よって，u_n の 2 次式 と y_n の 2 次式の和に整理すると

$$\begin{aligned} g(y) = &2c(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \\ &+ u_1^2 - 2\lambda_1 u_1 + y_1^2 - 2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)y_1 \\ &+ u_2^2 - 2\lambda_2 u_2 + y_2^2 - 2(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)y_2 \\ &+ u_3^2 - 2\lambda_3 u_3 + y_3^2 - 2(\lambda_3 + \lambda_4)y_3 \\ &+ u_4^2 - 2\lambda_4 u_4 + y_4^2 - 2\lambda_4 y_4 \end{aligned}$$

になる．これを平方完成すると，不等式

$$\begin{aligned} g(y) = &2c(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \\ &+ (u_1 - \lambda_1)^2 - \lambda_1^2 + (u_2 - \lambda_2)^2 - \lambda_2^2 \\ &+ (u_3 - \lambda_3)^2 - \lambda_3^2 + (u_4 - \lambda_4)^2 - \lambda_4^2 \\ &+ \{y_1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\}^2 \\ &\qquad - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)^2 \\ &+ \{y_2 - (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\}^2 - (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)^2 \\ &+ \{y_3 - (\lambda_3 + \lambda_4)\}^2 - (\lambda_3 + \lambda_4)^2 \\ &+ (y_4 - \lambda_4)^2 - \lambda_4^2 \\ \geq\ & g^*(\lambda) \end{aligned}$$

が成り立つ．等号は

$$\begin{aligned} u_1 &= \lambda_1, \quad y_1 = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 \\ u_2 &= \lambda_2, \quad y_2 = \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 \\ u_3 &= \lambda_3, \quad y_3 = \lambda_3+\lambda_4 \\ u_4 &= \lambda_4, \quad y_4 = \lambda_4 \end{aligned}$$

のときに限り成り立つ．この等号条件と制約式 (1) 〜 (4) からなる系は 12 元 12 連立 1 次方程式である．これは唯一の解

$$\hat{y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3, \hat{y}_4) = \frac{c}{34}(21, 8, 3, 1)$$

$$\hat{u} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3, \hat{u}_4) = \frac{c}{34}(13, 5, 2, 1)$$

$$\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*) = \frac{c}{34}(13, 5, 2, 1)$$

をもつ．したがって，不等式と等号

$$\begin{aligned} &g(y) \geq g^*(\lambda) \quad y \in R^4,\ \lambda \in R^4 \\ &g(\hat{y}) = g^*(\lambda^*) \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，最適解の対 $\hat{y}, \lambda^*$ が得られ，(P_4) から (P'_4) を経て (D_4) が導かれた．逆はこの導出を逆に遡ればよい．したがって，両問題は互いに双対である．

5. 動的計画法

主問題も双対問題も多様な方法で解ける [8]．ここでは動的計画法による解を与える [9, 10, 11, 12]．

5.1 主問題

一般に n 変数 $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ の主問題

$$(\mathrm{P_n}) \quad \begin{array}{l} \text{minimize} \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[\left(c - \sum_{l=1}^{k} y_l\right)^2 + y_k^2\right] \\ \text{subject to} \quad y \in R^n \end{array}$$

の最小値を $v_n(c)$ とする．ただし $c \in R^1$，$n = 1, 2, \ldots$. このとき，最小値関数列 $\{v_n\}$ はベルマン方程式

$$\begin{aligned} &v_0(c) = 0 \\ &v_n(c) = \min_{y \in R^1}\left[(c-y)^2 + y^2 + v_{n-1}(c-y)\right] \end{aligned}$$

を満たす．これは解

$$v_n(c) = \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}c^2, \quad \hat{y}_n(c) = \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}c$$

をもつ．したがって，主問題 (P_n) の最小点は

$$\begin{aligned} &(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_n) \\ &= \frac{c}{F_{2n+1}}\left(\boxed{F_{2n}}, \ \boxed{F_{2n-2}}, \ldots, \ \boxed{F_2} \right) \end{aligned}$$

で，最小値は $v_n(c) = F_{2n}/F_{2n+1}c^2$ になる．

5.2 双対問題

今度は双対問題を解こう（[9, pp. 211–215, 220] 参照）．この動的計画法では主問題と違って，新たにパラメータを導入して拡大問題群に埋め込む．n 変数 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ の双対問題

$$(\mathrm{D}_n) \quad \begin{array}{l} \text{Maximize} \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[2c\lambda_k - \lambda_k^2 - \left(\sum_{l=k}^{n}\lambda_l\right)^2\right] \\ \text{subject to} \quad \lambda \in R^n \end{array}$$

に対して，パラメータ μ をもつ部分問題群

$$\mathrm{D}_n(\mu) \quad \begin{array}{l} \text{Maximize} \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[2c\lambda_k - \lambda_k^2 - \left(\sum_{l=k}^{n}\lambda_l + \mu\right)^2\right] \\ \text{subject to} \quad \lambda \in R^n \end{array}$$

を考える．ただし $\mu \in R^1$，$n = 1, 2, \ldots$. 特に $\mu = 0$ のとき，拡大問題は双対問題になっている：$\mathrm{D}_n(0) = (\mathrm{D}_n)$. μ を**終端エンドースメント**という．

さて部分問題 $\mathrm{D}_n(\mu)$ の最小値を $w_n(\mu)$ とすると，ベルマン方程式

$$\begin{aligned} w_1(\mu) &= \operatorname*{Max}_{\lambda_1 \in R^1}\left[2c\lambda_1 - \lambda_1^2 - (\lambda_1+\mu)^2\right] \\ w_n(\mu) &= \operatorname*{Max}_{\lambda_n \in R^1}\Big[2c\lambda_n - \lambda_n^2 - (\lambda_n+\mu)^2 \\ &\qquad\qquad + w_{n-1}(\lambda_n+\mu)\Big] \end{aligned}$$

が成り立つ．これは目的式の再帰性（可分性）

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n}\left[2c\lambda_k - \lambda_k^2 - \left(\sum_{l=k}^{n}\lambda_l + \mu\right)^2\right] \\ &= 2c\lambda_n - \lambda_n^2 - (\lambda_n+\mu)^2 \\ &\quad + \left\{\sum_{k=1}^{n-1}\left[2c\lambda_k - \lambda_k^2 - \left(\sum_{l=k}^{n-1}\lambda_l + \tilde{\mu}\right)^2\right]\right\} \end{aligned}$$

において $\tilde{\mu} = \lambda_n + \mu$ に注意すれば，従う．

このベルマン方程式は最初の 3 段目まではすぐ解けて

$$w_1(\mu) = \frac{1}{2}\left(c^2 - 2c\mu - \mu^2\right)$$

$$\tilde{\lambda}_1(\mu) = \frac{1}{2}(c-\mu)$$

$$w_2(\mu) = \frac{1}{5}\left(3c^2 - 8c\mu - 3\mu^2\right)$$

$$\tilde{\lambda}_2(\mu) = \frac{1}{5}(c-3\mu)$$

$$w_3(\mu) = \frac{1}{13}\left(8c^2 - 24c\mu - 8\mu^2\right)$$

$$\tilde{\lambda}_3(\mu) = \frac{1}{13}(c-8\mu)$$

になる．一般に，解

$$w_n(\mu)=\frac{1}{F_{2n+1}}\left\{F_{2n}c^2-2(F_{2n+1}-1)c\mu-F_{2n}\mu^2\right\}$$

$$\tilde{\lambda}_n(\mu) = \frac{1}{F_{2n+1}}(F_1 c-F_{2n}\mu)$$

をもつことがわかる．したがって，双対問題 (D_n) の最大値 は $w_n(0)=F_{2n}/F_{2n+1}c^2$ で，最大点は

$$(\lambda_1^*,\ \lambda_2^*,\ldots,\lambda_n^*) = \frac{c}{F_{2n+1}}\left(\ \boxed{F_{2n-1}},\ \ \boxed{F_{2n-3}},\ldots,\boxed{F_1}\ \right)$$

になる．

5.3　動的計画論

さて，双対問題 (D_n) の最大点が上記のように与えられることは以下の議論による．まず段の総数 n を定める．前述の n 段動的計画（過程）は最終の第 n 段の状態 μ $(\in R^1)$ から始まり第 1 段で終わっている．途中の第 k 段の状態 μ で決定 λ_k $(\in R^1)$ をとると，次に第 $(k-1)$ 段の状態 $\lambda_k+\mu$ に推移する．このとき，利得 $2c\lambda_k-\lambda_k^2-(\lambda_k+\mu)^2$ が発生する．決定列 $\lambda_n\to\lambda_{n-1}\to\cdots\to\lambda_2\to\lambda_1$ に伴う状態列は

$$\begin{aligned}&\mu\longrightarrow\lambda_n+\mu\longrightarrow\lambda_{n-1}+\lambda_n+\mu\longrightarrow\cdots\\&\longrightarrow\lambda_2+\lambda_3+\cdots\lambda_n+\mu\longrightarrow\\&\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\cdots\lambda_n+\mu\end{aligned}$$

になり，利得の集積は

$$\begin{aligned}&\ \ 2c\lambda_n-\lambda_n^2-(\lambda_n+\mu)^2\\&+2c\lambda_{n-1}-\lambda_{n-1}^2-(\lambda_{n-1}+\lambda_n+\mu)^2\\&\ \ \vdots\\&+2c\lambda_2-\lambda_2^2-(\lambda_2+\lambda_3+\cdots\lambda_n+\mu)^2\\&+2c\lambda_1-\lambda_1^2-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\cdots\lambda_n+\mu)^2\end{aligned}$$

なっている．$\mu=0$ のとき，この集積値は双対問題 (D_n) の目的関数の値になっている．この n 段過程は最適値関数列 $\{w_1,\ w_2,\ldots,w_n\}$ および最適政策（最適決定関数列）$\{\tilde{\lambda}_1,\ \tilde{\lambda}_2,\ldots,\tilde{\lambda}_n\}$ をもっている：

$$w_k(\mu)=\frac{1}{F_{2k+1}}\left\{F_{2k}c^2-2(F_{2k+1}-1)c\mu-F_{2k}\mu^2\right\}$$

$$\tilde{\lambda}_k(\mu)=\frac{1}{F_{2k+1}}(F_1 c-F_{2k}\mu).$$

この過程において初期状態 μ から最適政策を用いると，拡大問題 $\mathrm{D}_n(\mu)$ の最大点 $\{\lambda_1^*(\mu),\ \lambda_2^*(\mu),\ldots,\lambda_n^*(\mu)\}$ は

$$\lambda_k^*(\mu)=\frac{1}{F_{2n+1}}(F_{2n-2k+1}c-F_{2k}\mu)$$

になる．ここではフィボナッチ数列の加法定理 [3]

$$F_{m+n}=F_{m-1}F_n+F_mF_{n+1}$$

を用いている．したがって，双対問題 (D_n) の最大点 $\{\lambda_1^*,\ \lambda_2^*,\ldots,\lambda_n^*\}$ は $\mu=0$ を代入して

$$\lambda_k^*=\frac{1}{F_{2n+1}}F_{2n-2k+1}c$$

で与えられる．

参考文献

[1] A. Beutelspacher and B. Petri（柳井浩訳），『黄金分割―自然と数理と芸術と―』，共立出版，2005.
[2] R. A. Dunlap（岩永恭雄，松井講介訳），『黄金比とフィボナッチ数』，日本評論社，2003.
[3] 中村滋，『フィボナッチ数の小宇宙―フィボナッチ数，リュカ数』，黄金分割―（改定版），日本評論社，2008.
[4] H. Walser（蟹江幸博訳），『黄金分割』，日本評論社，2002.
[5] 柳亮，『黄金分割―ピラミッドからル・コルビュジュまで―』，美術出版社，1965.
[6] 柳亮，『黄金分割―日本の比例―』，美術出版社，1977.
[7] D. Brown（越前敏弥訳），『ダ・ヴィンチ・コード（上・下）』，角川書店，2004.
[8] 岩本誠一，『最適化の数理 II　ベルマン方程式』，知泉書館，2013.
[9] 岩本誠一，『動的計画論』，九州大学出版会，1987.
[10] R. E. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton University Press, 1957.
[11] 岩本誠一，"20 世紀の名著・名論 Richard E. Bellman, Dynamic Programming,"情報処理，**46**, 842, 2005.
[12] M. Sniedovich, *Dynamic Programming: Foundations and Principles*, 2nd ed., CRC Press, 2010.