

折り紙ユニットにより作成可能な凸多面体

藤田 敏治, 中野 多恵, 長友 健太郎

折り紙ユニットと呼ばれる部品を複数組み合わせることができる凸多面体について調べる. この問題は, 折り紙ユニットからどのような展開図が構成されるかを考える問題と, 与えられた多角形(展開図)から作成可能な凸多面体を考える問題との2段階からなる. 前者は通常の決定過程として, 後者は相互依存型決定過程として定式化され, 動的計画法による再帰式にて解かれる.

キーワード: 相互依存型決定過程, ユニット折り紙, 凸多面体

1. はじめに

筆者らは, 九州工業大学で理数教育支援センターなるところに関わっているが, そのセンターの主な役割は地域への理数教育の支援である. そして, 具体的な活動の一つとして地域の住民向けに科学教室を実施している. この科学教室で人気のテーマの一つが折り紙に関するものであり, 特に折り紙ユニットによる多面体づくりはたいへん好評である. 時折, 子供や保護者から「他にどんな立体ができるの?」「何種類あるの?」と聞かれることもあるが, そこで明確な答えが示せないことが残念であった. そこで, まずは凸多面体に制限はするが, 折り紙ユニットからどのような立体が作成可能かを調べようと考えた次第である.

折り紙ユニットとは, 1枚の正方形あるいは長方形の折り紙から作成される多角形の形状をしたものである. ユニットには継手となる部分があり, 継手が別のユニットの差し込み口に差し込まれることで, ユニット同士がつながっていく. 1種類(場合によっては数種類)のユニットをもとに, 折り目を工夫して組み合わせることで多様な多面体を作成できる. 例えば, [1, 2]の中では, 正方ユニットや3角ユニット, あるいは3角正方ユニットと呼ばれるものを用いて, 正多面体や準正多面体をはじめ凸でないものも含めて実にさまざまな多面体の構成方法を与えている. また, [3~6]においては一般3角ユニットなるものが考案され, 星形正多面体なども正確に実現されている. なお, 九工大の理数教育支援センターでは, これら三村文武先生(広

島経済大学, 九州工業大学名誉教授)の結果を利用して, 立体づくり教室を行っている.

2. 折り紙ユニットによる多面体の作成

折り紙ユニットでどのように立体を作成していくかについて, 立方体の作成を例に説明する. なお, 折り紙ユニットについては多くの書籍も出版されており, ご存じの方も多岐にわたるかもしれない. おそらく, 立方体を作成するための最も有名なユニットは, 菌部式(簡易菌部式)ユニット [7] であるが, ここでは前述の [1, 2] に掲載されている正方ユニットを用いる. どちらも正方形あるいは正方形を折ってできる図形を面に持つ立体を作成できるが, 後者の特徴は折り紙の両面が表に出てくるとユニットを接続する際の差し込みが浅い点である. よって, 両面折り紙を用いることでより細かい模様 of 立体が作成でき, かつ複雑な折り目を付けた場合でも比較的容易に組み立てることが可能である. 正方ユニットの折り方を図 1 に示す. 正方ユニットは, 図 2 のように, 各ユニットの差し込み口に 2 個のユニットが接続される.

立方体を作成する場合, 両面折り紙 3 種類を 2 枚ずつ計 6 枚用意し (1 種類 × 6 枚でも可), 正方ユニットを作成する. そして, 図 3 の点線で折り目(山折)を付け, 図 2 の要領で同じ色のユニットが向かい合うように組み合わせていけばよい(図 4 参照). また, 同じく 6 個の正方ユニットを用意し, 折り目を図 5 左のように変更すれば, 図 5 右の立体(星形 8 面体に似た立体)が作成できる.

その他にも, [1, 2] にたくさんの立体が掲載されているので, ぜひ挑戦していただきたい. なお, [3~6] に掲載されている立体になると, 難易度はかなり高い. ([1~3] は九州工業大学学術機関リポジトリ “Kyutacar” にて参照可.)

ふじた としはる, なかの たえ
九州工業大学大学院工学研究院
〒 804-8550 北九州市戸畑区仙水町 1-1
ながとも けんたろう
株式会社平山
〒 108-0075 東京都港区港南 1-8-40 品川プレイス 6F

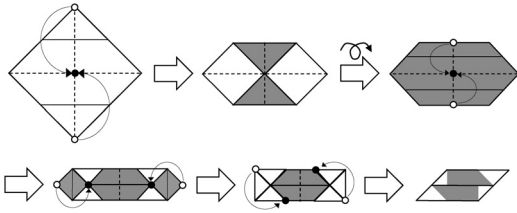


図1 正方ユニットの折り方 (白丸が黒丸に重なるように折る. 最後は滑り込ませるように折る)

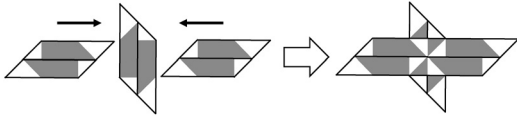


図2 正方ユニットの接続

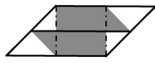
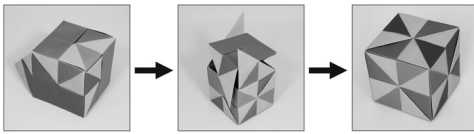


図3 立方体用折り線



まず3個で角を作る
完成直前
完成
(各ユニットに挿しこまれる2つのユニットは同じ種類(色))

図4 立方体の組み立て

3. 正方ユニットによる凸多面体

正方ユニットにおいて立体の面を構成するのは、中央の正方形部分である (図6 グレー部分). 残りの二つの直角2等辺3三角形部分は継手となり、他のユニットとの接続に用いられる.

ここで、例えば2個の正方ユニットにより構成可能な凸多面体を調べる場合、その2個を接続したもの (図7) において、正方形2個が連なった長方形部分の図形が実際に立体の面となりうる部分に相当する。(以後、実際に立体が作成可能か否かに関わらず、この立体の面になりうる部分を展開図と呼ぶこととする.)

これが継手によって接続されていくため、各継手をどの接続口に差し込むか、そしてどちらから接続するかを考えればよい. すなわち各ユニットに対応する正方形の各辺を単位として、展開図内でどの辺とどの辺を組み合わせれば凸多面体になるかを注意深く探ればよい. この種の問題は、Lubiw と O'Rourke が [8, 9]

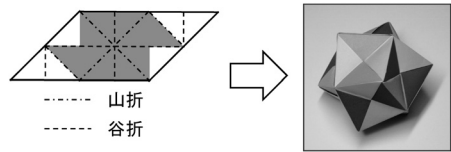


図5 正方ユニット6個からなる立体

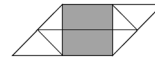


図6 正方ユニット

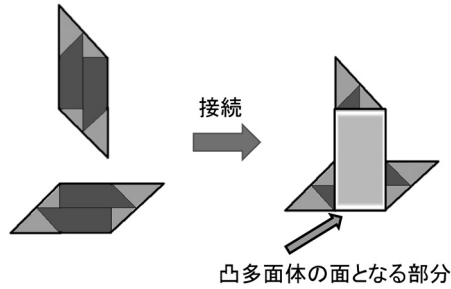


図7 正方ユニットと展開図

において扱った問題と本質的に同じものであり、[10] において、相互依存型決定過程問題として動的計画の枠組みで定式化されている. ここでは、その概略について紹介する.

3.1 相互依存型決定過程による定式化

相互依存型決定過程とは、nonserial な状態推移 ([11, 12]) をもつ決定過程の一種で、複数の決定過程が互いにその利得関数を通して再帰的に依存しているものである. ここで考える凸多面体構成問題は2種の決定過程からなり、一方の決定過程における利得関数が、他方の最適値の関数として定まる.

正方形4個を縦に連ねた展開図 (図8, 正方ユニットを縦に4個連ねたときに対応) を例に述べる. まず、展開図において正方形の頂点・辺に対応する部分をそれぞれ $v_0, v_1, v_2, \dots, v_9$ および $e_0, e_1, e_2, \dots, e_9$ とおく. さらに、各頂点 v_i に対応する角の大きさを α_i ($0^\circ < \alpha_i < 360^\circ$) とおく. 基本的な考え方はアレクサンドロフの定理に基づいており、二つの条件

- (i) 各頂点に集まる角の大きさが 360° を超えない
- (ii) 出来上がる立体に穴ができない

が満たされるように辺の組み合わせを考えていくのである. ただし、体積0の2面体もこの条件を満たし、以後凸多面体には2面体も含めるものとする.

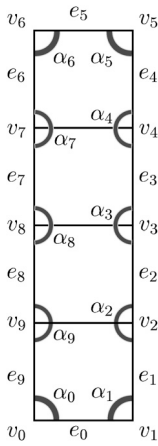


図8 展開図

相互依存型決定過程における二つの状態空間は共通にとられ、以下のように定める。

$$X = \{(i, j, I) \mid i, j = 0, 1, \dots, 10, I \subset \{0, 1, \dots, 9\}\}$$

状態 $(i, j, I) \in X$ は、組み合わせが未決定の連続する辺の端点 v_i, v_j および、この状態以前に頂点 v_i に集まった角 α_i のインデックス集合 I を表す。初期状態は $\bar{x}_0 = (0, 10, \phi)$ とする。ただし、頂点 v_{10} は頂点 v_0 と同じ頂点を表し、便宜上の表現として加えている。

また、終了状態集合も共通にとられ

$$T = \{(i, j, I) \in X \mid i = j\}$$

で与えられる。すなわち、考慮すべき辺がなくなったときに終了期である。

次に、状態 $(i, j, I) \in X$ に対する可能決定集合は

$$U(i, j, I) = \{(i, k) \mid i < k < j, k - i = 2n + 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)\}$$

ととる。決定 $(i, k) \in U(i, j, I)$ は、辺 e_i と e_k を重ね合わせることを表し、 $U(i, j, I)$ は v_i と v_j の間の辺において、最も若い番号の辺をどの辺と重ね合わせるかを表す決定の集合である。条件式 $k - i = 2n + 1$ は、組み合わせる辺が継手に相当する部分と差し込み口に相当する部分のペアでなければならないことを意味する。展開図において継手と差し込み口が交互に現れることから、間にある辺の数が偶数 $(0, 2, 4, \dots)$ でなければならないのである。

確定的状態推移は、現状態 $(i, j, I) \in X \setminus T$ と決定 $(i, k) \in U(i, j, I)$ に対し、次で定める（注：可能決定集合の定義より $i = a$ が成り立つ）。

$$f_1((i, j, I), (i, k)) = (i + 1, k, \phi)$$

$$f_2((i, j, I), (i, k)) = \begin{cases} (k + 1, j, I \cup \{i, j\}) & k \neq j - 1 \\ (i, i, I \cup \{i, j\}) & k = j - 1 \end{cases}$$

ただし、 f_2 における I の更新時、要素 10 は 0 と同一視する（同一の頂点を表す番号であるため）。

状態 $f_1((i, j, I), (i, k))$ は、辺 e_i を e_k に重ね合わせた際、辺の組み合わせが未決定な部分の前半に対応し、 $f_2((i, j, I), (i, k))$ は後半に対応する。この際、角 α_i, α_j は後半に位置し、必ず（重ね合わせの結果）同一頂点となる $v_i = v_{k+1}$ に集まる。これがインデックス集合 I の更新に反映されている。なお、この状態・決定・状態推移の定め方により、条件 (ii) を満たす辺の組み合わせのみが生成される。

さらに、

$$c(i, j, I) = \sum_{k \in \{i, j\} \cap I^c} \alpha_k$$

とする。ただし、ここでも $\{i, j\} \cap I^c$ における要素 0 と 10 は同一視し、 I の補集合については

$$I^c = \{0, 1, \dots, 9\} \setminus I$$

とする。また $i = j$ のとき $\sum_{k \in \{i, j\} \cap I^c}$ は $\sum_{k \in \{i\} \cap I^c}$ を意味するものとし、もし $\sum_{k \in \phi}$ となったときの値は 0 とする。

このとき、解くべき問題は初期状態 $x_0 = \bar{x}_0 = (0, 10, \phi)$ に対する主決定過程問題

$$P(x_0) \text{ Min } r(x_0, u_0) \vee \dots \vee r(x_{M-1}, u_{M-1}) \vee r_G(x_M)$$

$$\text{s.t. } x_{n+1} = f_1(x_n, u_n) \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$u_n \in U(x_n) \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$M = \max\{m \mid x_m \notin T\} + 1$$

で与えられ、 $x \in X, u \in U(x)$ に対する副決定過程問題は

$$Q(x, u) \text{ Min } I_{(360, \infty)} \left[c(x) + q(x_0, u_0) \right. \\ \left. + \dots + q(x_{M-1}, u_{M-1}) + q_G(x_M) \right]$$

$$\text{s.t. } x_0 = f_2(x, u)$$

$$x_{n+1} = f_Y(x_n, u_n) \quad n = 0, 1, \dots, M - 1$$

$$u_n \in U(x_n) \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$M = \max\{m \mid x_m \notin T\} + 1$$

となる。ただし、 \vee は最大演算子 ($a \vee b = \max(a, b)$), $I_{(360, \infty)}(x)$ は特性関数 ($x \in (360, \infty)$ のとき 1, そうでないとき 0) とし, $x_0 = f_2(x, u) \notin T$ なる (x, u) に対し

$$r(x, u) = \min_{\substack{x_{n+1}=f_2(x_n, u_n), \\ u_n \in U(x_n)}} I_{(360, \infty)} \left[c(x) + q(x_0, u_0) \right. \\ \left. + \cdots + q(x_{M-1}, u_{M-1}) + q_G(x_M) \right]$$

であり, また K を $K > 360$ なる定数とおき, $x_0 = f_1(x, u) \notin T$ なる (x, u) に対し

$$q(x, u) = c(x) \vee \left(K \times \min_{\substack{x_{n+1}=f_1(x_n, u_n), \\ u_n \in U(x_n)}} \left[r(x_0, u_0) \right. \right. \\ \left. \left. \vee \cdots \vee r(x_{M-1}, u_{M-1}) \vee r_G(x_M) \right] \right)$$

である。終端利得関数については終了状態の定義により

$$r_G(x) = I_{(360, \infty)}(c(x)) = 0, \quad q_G(x) = c(x) = 0$$

となる。

おおまかに言えば, 副決定過程では, 辺を接続した結果, 重なる頂点に集まる角の大きさの和が 360° 以下か否かを判定し, 主決定過程では, 360° 以下が各頂点で満たされているかを判定している。いずれも最小値が 0 か否かにより, 条件 (i) を検証している。

この問題に対する相互依存型再帰式は, 主過程の最適値関数を w , 副過程の最適値関数を z で表すとき

$$w(x) = 0 \quad x \in T$$

$$w(x) = \min_{u \in U(x)} \left[z \left(f_2(x, u), c(x) \right) \vee w \left(f_1(x, u) \right) \right] \\ x \notin T$$

$$z(x, \mu) = I_{(360, \infty)}(\mu) \quad x \in T, \quad \mu \in \mathbf{R}$$

$$z(x, \mu) = \min_{u \in U(x)} \left[z \left(f_2(x, u), \mu + \left[c(x) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \vee \{ K \times w \left(f_1(x, u) \right) \} \right] \right) \right] \quad x \notin T, \quad \mu \in \mathbf{R}$$

で与えられる。なお, 副過程については, パラメーターを埋め込むことで (埋め込み過程により), 再帰式を導いているが, 詳細は [9, 13] に譲る。求めるべき最適値は $w(0, 10, \phi)$ であり, その値が 0 のとき凸多面体は構成可能で, 最適政策が辺の組み合わせを与える。

3.2 計算結果

3.1 節の再帰式を計算した結果を以下に示す。最適値は 0 となり, 凸多面体は作成可能である。辺の組み合わせは次の 12 通りが得られた。

- (1) $e_0 - e_1, e_2 - e_5, e_3 - e_4, e_6 - e_9, e_7 - e_8$
- (2) $e_0 - e_1, e_2 - e_9, e_3 - e_8, e_4 - e_7, e_5 - e_6$
- (3) $e_0 - e_3, e_1 - e_2, e_4 - e_5, e_6 - e_9, e_7 - e_8$
- (4) $e_0 - e_3, e_1 - e_2, e_4 - e_9, e_5 - e_8, e_6 - e_7$
- (5) $e_0 - e_5, e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_6 - e_7, e_8 - e_9$
- (6) $e_0 - e_5, e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_6 - e_9, e_7 - e_8$
- (7) $e_0 - e_5, e_1 - e_4, e_2 - e_3, e_6 - e_7, e_8 - e_9$
- (8) $e_0 - e_5, e_1 - e_4, e_2 - e_3, e_6 - e_9, e_7 - e_8$
- (9) $e_0 - e_7, e_1 - e_4, e_2 - e_3, e_5 - e_6, e_8 - e_9$
- (10) $e_0 - e_7, e_1 - e_6, e_2 - e_5, e_3 - e_4, e_8 - e_9$
- (11) $e_0 - e_9, e_1 - e_4, e_2 - e_3, e_5 - e_8, e_6 - e_7$
- (12) $e_0 - e_9, e_1 - e_8, e_2 - e_7, e_3 - e_6, e_4 - e_5$

例えば (1) は, 図 8 において, e_0 と e_1 , e_2 と e_5, \dots と接続することを表しており, その際の折り目は図 9 左, これに基づく正方ユニットの折り目は図 9 右となる。作成される立体は 4 面体である。他の結果についても同様に調べたところ, 図 8 の展開図により構成可能な凸多面体は 5 種類で, 内 3 種類が 2 面体であった。

4 個の正方ユニットにより作成可能な凸多面体すべて, および辺の組み合わせ (1)~(12) との対応を図 10 に示す。辺の組み合わせとの対応がない図形は, 同じく 4 個の正方ユニットから構成されるが, ユニットの接続を変えた場合に (すなわち異なる展開図から) 生じるものである。

3.1 節では, 展開図として図 8 のものを対象としたが, その他の展開図についても頂点数と各頂点に対応する角の大きさ $\{\alpha_i\}$ を適切に設定することで再帰式をそのまま利用できる。例えば, 1 個の正方ユニットに対応する展開図 (図 11A), 2 個の正方ユニットに対応する展開図 (図 11B) および 3 個の正方ユニットに対応する展開図 (図 11C, D) に対しては, x_0 と $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ をそれぞれ

$$(0, 4, \phi), \quad \{90, 90, 90, 90\}$$

$$(0, 6, \phi), \quad \{90, 90, 180, 90, 90, 180\}$$

$$(0, 8, \phi), \quad \{90, 90, 180, 180, 90, 90, 180, 180\}$$

$$(0, 8, \phi), \quad \{90, 180, 90, 90, 270, 90, 90, 180\}$$

とし, 再帰式を用いて $w(x_0)$ を求めればよい。

3.3 3 角ユニットで構成される凸多面体

3 角ユニットとは, 正 3 角形 2 個を接続したひし形あるいはそれを折ってできる図形を面として持つ立体を作成可能なもので, 作成方法等の詳細は [1] を参照いただきたい。例えば, 正 4, 8, 20 面体, 星形 8 面体, 平行 6 面体 (面はひし形), 正 20 面体の第 3 の星

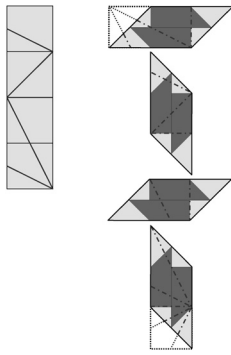


図 9 その他の展開図

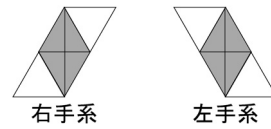


図 12 3角ユニット

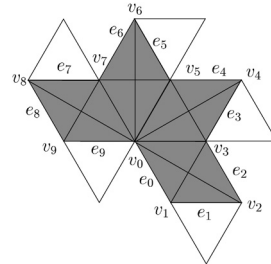


図 13 4個の接続例

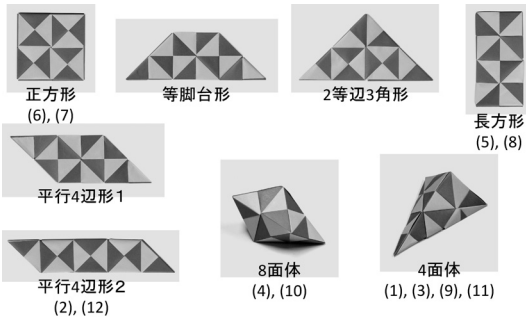


図 10 4個の正方ユニットによる凸多面体

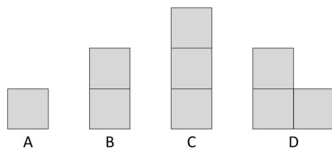


図 11 その他の展開図

形等が作成できる。

3角ユニットは、図 12 の形をしており¹、中央の(正3角形二つからなる)ひし形部分が立体の面を構成し、残りの二つの正3角形部分が継手となる。ひし形部分の中央縦の線が差し込み口となり、正方ユニットと同様に、各ユニットに対し2個のユニットが接続される。

この3角ユニットから作成可能な凸多面体を調べるには、正方ユニットに対して導いた解法が適用できる。例えば、4個の3角ユニット(右手系)を図 13 のように接続したのに対しては、展開図に相当する部分の図形(グレーの部分)から

$$x_0 = (0, 10, \phi)$$

$$\{\alpha_i\} = \{240, 120, 60, 240, 60, 240, 60, 240, 60, 120\}$$

¹ 正方ユニットにも鏡像関係にある右手系と左手系は存在するが、立体作成の観点からは考慮する必要がない。混在させた場合、逆に作成可能な多面体が制限される。

とし、 $w(x_0)$ を求めればよい。この場合、最適値は 0 となり、凸多面体は作成可能となる。辺の組み合わせは次の 8 通りが得られた。

- (1) $e_0 - e_1, e_2 - e_3, e_4 - e_9, e_5 - e_8, e_6 - e_7$
- (2) $e_0 - e_1, e_2 - e_9, e_3 - e_8, e_4 - e_5, e_6 - e_7$
- (3) $e_0 - e_3, e_1 - e_2, e_4 - e_5, e_6 - e_9, e_7 - e_8$
- (4) $e_0 - e_3, e_1 - e_2, e_4 - e_9, e_5 - e_8, e_6 - e_7$
- (5) $e_0 - e_5, e_1 - e_4, e_2 - e_3, e_6 - e_7, e_8 - e_9$
- (6) $e_0 - e_5, e_1 - e_4, e_2 - e_3, e_6 - e_9, e_7 - e_8$
- (7) $e_0 - e_7, e_1 - e_6, e_2 - e_3, e_4 - e_5, e_8 - e_9$
- (8) $e_0 - e_9, e_1 - e_8, e_2 - e_3, e_4 - e_5, e_6 - e_7$

図 13 は、正 8 面体の展開図(の一つ)にあたるが、他に 6 面体と 3 種の 2 面体(2 等辺 3 角形, 平行 4 辺形, 台形)が作成可能であることがわかった。

4. ユニット接続問題

前節において、特定の並びで接続したユニットから凸多面体が構成可能か否かについては解決した。しかし、同数のユニットを利用した場合でも、その接続の仕方によって展開図に相当する部分の形が異なり、そこから作成できる凸多面体も一般に異なる。よって、ユニットのあらゆる接続の仕方を考慮しなければならないが、ユニット数が増えるにつれ、その種類は爆発的に増加する。その数は、正方ユニット 7 個のときで 108 種類、3 角ユニットだと 5 個でも 238 種類となる。そこで、ユニットの接続法についても決定過程問題として定式化し、一定数のユニットを用いてどのような凸多面体が構成可能であるかを考える。なお、正方ユニッ

トに比べて、3角ユニットの場合がより細かく接続状況を考慮する必要があるため、ここでは3角ユニットについて説明を進める（正方ユニットの場合も同様に処理可）。

定式化にあたり、1個のユニットに対応する展開図（すなわちひし形）を初期状態とし、各期でユニットを1個接続していく。この際の接続の仕方が決定となり、接続した結果に対応する展開図を次状態とする。そして、最終状態として現れる展開図に前節の解法を適用して凸多面体が作成可能か否かを判定する。

まず、状態は展開図における頂点数 d と各頂点に対応する角の大きさ $\{\alpha_i\}$ ($\alpha_i > 0$) からなる $y = (d, \{\alpha_i\})$ とし、決定はユニットの種類 H とユニットを接続する辺番号 m からなる (H, m) で表す。なお、ここでいう頂点とは、3角ユニット1個に対応するひし形の頂点で、重なるものを同一視したものである。反時計回りに v_0, v_1, \dots とし（図13参照）、2節同様に頂点 v_i に対応する角の大きさを α_i で、辺 $v_i v_{i+1}$ を e_i で表すこととする。また、ユニットの種類 H とは、接続する3角ユニットの種類を表し、 $H = R$ のときは右手系ユニットを、 $H = L$ のときは左手系ユニットを接続するものとする。例えば、決定 $(R, 3)$ は右手系ユニットを e_3 に接続することを表す。ここで、追加する側のユニットについてはひし形のどの辺を接続するかの指定は不要である。継手と差し込み口の関係、および3角ユニットの対称性から結果は一意になる。

以上のことから、状態空間 Y と $y = (d, \{\alpha_i\}) \in Y$ に対する可能決定集合 $V(y)$ はそれぞれ

$$Y = \{(d, \{\alpha_i\}) \mid d = 4, 5, \dots; \alpha_i = 60, 120, \dots, 360 \\ (i = 0, 1, \dots, d - 1)\}$$

$$V(y) = \{(H, m) \mid H = R, L; m = 0, 1, \dots, d - 1\}$$

となる。初期状態は1つのユニットに相当するひし形なので $y_0 = (4, \{60, 120, 60, 120\})$ である。なお、初期状態としては、右手系と左手系のどちらを選択しても作成可能な展開図の形は本質的に変わらないので、右手系を想定する。すなわち、奇数番号の辺が継手部分を表すこととする。また、現状態 $y = (d, \{\alpha_i\})$ と決定 $v = (H, m) \in V(y)$ に対する次状態を以下のように定める。

まず

$$\beta_1^1 = 60, \beta_2^1 = 120, \beta_3^1 = 60, \beta_4^1 = 120 \\ \beta_1^2 = 120, \beta_2^2 = 60, \beta_3^2 = 120, \beta_4^2 = 60$$

とおき、「 $H = R, m$: 偶数」または「 $H = L, m$: 奇数」のとき $\tau = 1$ 、「 $H = L, m$: 偶数」または「 $H = R, m$: 奇数」のとき $\tau = 2$ とする。このとき、

$$\alpha'_i = \begin{cases} \alpha_i & m - d + 1 < i < m \\ \alpha_i + \beta_1^\tau & i = m \\ \beta_2^\tau & i = m + 1 \\ \beta_3^\tau & i = m + 2 \\ \alpha_{i-2} + \beta_4^\tau & i = (m + 3) \bmod (d + 2) \\ \alpha_{i-2} & m + 4 \leq i \leq d \end{cases}$$

および $d' = d + 2$ がユニットを1個追加した際の展開図部分を表す。ここで、展開図から冗長な辺を削除するため、 $\alpha'_i = 360$ なる i が存在すれば、頂点 v_i と辺 e_{i-1}, e_i ($i = 0$ のときは、辺 $e_{d'-1}, e_0$) の記号を展開図から取り除き、あらためて v_i, α_i, e_i の番号を振りなおす。この操作を $\alpha'_i = 360$ なる i が存在しなくなるまで繰り返し、得られた結果をあらためて $\{\alpha'_i\}, d'$ とみなす。そして、状態推移法則 f を

$$f(y, v) = (d', \{\alpha'_i\})$$

と定める。

利得関数 R および終端利得関数 K については

$$R((d, \{\alpha_i\}), (H, m)) = \begin{cases} 1 & (i; \alpha_i > 360) \\ I_{(360, \infty)}(\alpha_m + \beta_1^\tau) \vee I_{(360, \infty)}(\alpha_{m+1} + \beta_4^\tau) & \text{(その他)} \end{cases}$$

$$K(d, \{\alpha_i\})$$

$= (\{\alpha_i\}$ を与えたときの $P(0, d, \phi)$ の最適値)

とおく。ただし、 $m + 1 = d$ のとき、 $m + 1$ は0とみなし、 $P(0, d, \phi)$ は第3節の主決定過程問題を表す。利得関数値は、ある期の展開図において、すでに頂点に集まっている角の大きさが 360° を超えているか、ユニットを接続することで頂点に集まる角の大きさが 360° を超えれば1となり、そうでない場合は0となる。また、終端利得関数は、終端状態で表される展開図に対して、凸多面体が構成可能であれば0を、そうでなければ1をとる。最後に、期数 N を

$$N = (\text{接続する3角ユニットの数}) - 1$$

と定めるとき、 $N + 1$ 個の3角ユニットで凸多面体が作成可能かどうかを調べる問題は次の最大型評価最小化問題となる。

$$\begin{aligned} \text{Min } & R(y_0, v_0) \vee \dots \vee R(y_{N-1}, v_{N-1}) \vee K(y_N) \\ \text{s.t. } & y_{n+1} = f(y_n, v_n) \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\ & v_n \in V(y_n) \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

この問題に対しては、次の再帰式が導かれる。

$$\begin{aligned} W^n(y) &= \min_{v \in V(y)} [R_n(y, v) \vee W^{n+1}(f(y, v))] \\ & \quad y \in X, n = 0, 1, \dots, N-1 \\ W^N(y) &= K(y) \quad y \in X \end{aligned}$$

問題の最小値 $W^0(y_0)$ が 0 のとき、 $N+1$ 個の 3 角ユニットにより凸多面体は作成可能である。また、そのときの最適政策が凸多面体を構成するための展開図を与え、さらに最終状態に対応して解かれた主決定過程問題の最適政策が凸多面体となるための辺の組み合わせを与える。

5. 結果と補足

4 節の解法は、ユニットを右手系に限定し、 β_i^r をすべて 90 とおくことで、そのまま正方ユニット接続問題に適用できる。実際、より簡単な設定で問題は定式化されるが、詳細は省略する。

以下、得られた計算結果を紹介する。表 1 はユニット数に応じて、凸多面体を作成可能な展開図が何種類存在するかをまとめたものである。解として生じる展開図には、同じ展開図だが頂点の付け方が異なるもの、あるいは鏡像関係にあるものも含まれるが、表 1 においては除外している。なお、折り紙ユニットの接続によって得られる展開図には制限があり（正 4 面体の展開図は 1 種類のみ）、もちろん折り紙ユニットを任意に接続した形から必ず凸多面体を作成できるわけではない（今回の設定においても、凸多面体が構成できな

表 1 展開図数

ユニット数	2	3	4	5	6	7
正方ユニット	1	2	5	12	35	108
3 角ユニット	2	9	40	238	1514	10145
8	9	10	11	12	13	
369	1280	4587	16472	59323	208921	
68657	458118					

表 2 凸多面体数、カッコ内は 2 面体の数 (内数)

ユニット数	1	2	3	4	5	6
正方ユニット	1	3	3	8	6	13
	(1)	(3)	(2)	(6)	(4)	(7)
3 角ユニット	1	4	7	13		
	(1)	(3)	(5)	(8)		

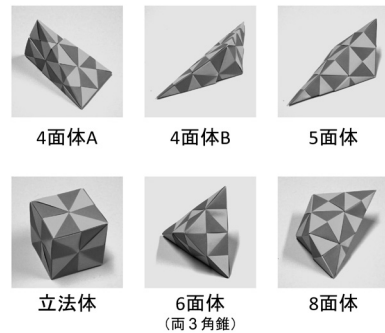


図 14 6 個の正方ユニットによる凸多面体



図 15 4 個の 3 角ユニットによる凸多面体

い展開図が、正方ユニットでは 9 個以上、3 角ユニットでは 6 個以上のとき現れる)。

実際に作成可能な凸多面体の種類については、数が膨大ですべては調べきれていないが、判明しているものについて表 2 に示す。なお、図形として合同でも、折り紙ユニットによる作成方法は 1 通りとは限らない (使用する右手系・左手系ユニットの内訳、折り目の付け方は一意ではない)。図 14 は 6 個の正方ユニットから構成可能な凸多面体で、図 15 は 4 個の 3 角ユニットから構成可能な凸多面体である。いずれも 2 面体は除いているが、前者については 7 種 (長方形, 平行 4 辺形 2 種, 台形 2 種, 5 角形, 6 角形), 後者については 8 種 (正 3 角形, 2 等辺 3 角形, 長方形, 平行 4 辺形 3 種, 台形 2 種) の 2 面体が作成可能である。

6. おわりに

折り紙立体づくりは、老若男女を問わず夢中になるテーマであり、折り紙立体の教室は、子供達はもちろん住民全体の理数リテラシー向上に寄与していると感じる。本稿をきっかけに興味を持っていただければ幸いです。

謝辞 本稿を執筆する機会をいただいた穴太克則先生に感謝いたします。また、本研究は科研費 23654038 の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] 三村文武, “ユニットにより構成される多面体の模型,” 九州工業大学研究報告 (工学), **47**, 87–97, 1983.
- [2] 三村文武, “ユニットにより構成される多面体の模型 II,” 九州工業大学研究報告 (工学), **49**, 69–76, 1984.
- [3] 三村文武, “ユニットにより構成される多面体の模型 III,” 九州工業大学研究報告 (工学), **49**, 77–85, 1984.
- [4] F. Mimura, “Some Stellated Polyhedrons Constructed by Paper Units,” *HUE Journal of Humanities, Social and Natural Sciences*, **32**, 3–8, 2009.
- [5] F. Mimura, “Two Compounds Constructed by Paper Units,” *HUE Journal of Humanities, Social and Natural Sciences*, **32**, 27–30, 2009.
- [6] 三村文武, 岩下有里, “ユニットによる星形多面体の構成,” 広島経済大学研究論集, **34**, 23–34, 2011.
- [7] 笠原邦彦, 最新折り紙のすべて, 日本文芸社, 1986.
- [8] E. D. Demaine and J. O’Rourke, *Geometric Folding Algorithms*, Cambridge University Press, 2007.
- [9] A. Lubiw and J. O’Rourke, “When can a polygon fold to a polytope?,” *Technical Report 048*, Smith College, 1996.
- [10] 藤田敏治, 結合型評価をもつ相互依存型決定過程, 京都大学数理解析研究所講究録, **1802**, 78–84, 2012.
- [11] U. Bertelé and F. Brioschi, *Nonserial Dynamic Programming*, Academic Press, 1972.
- [12] G. L. Nemhauser, *Introduction to Dynamic Programming*, Wiley, 1966.
- [13] 藤田敏治, 長友健太郎, “折り紙ユニットを用いた凸多面体の構成 —相互依存型決定過程によるアプローチ—,” 京都大学数理解析研究所講究録, 掲載予定.