# 身のまわりの統計学

鈴木　淳生

現在，われわれの社会は情報・データにあふれている．そのような社会において情報・データに流されずに意思決定，問題解決をするのにオペレーションズ・リサーチ (OR) は大変有用なものであろう．また「身のまわり」にあるさまざまな問題を OR の手法を用いて解決をしようとする場合，その手法には制限はないであろう．そこで本稿では，数ある手法の中で統計的検定における定理と例を概説する．

キーワード：統計的検定，正規分布，$t$ 分布，カイ 2 乗分布，再生性，検定統計量

## 1. はじめに

普段われわれは生活の中で数学・統計が身のまわりにあふれていることを意識することは少ないのではないだろうか．しかし少し考えてみると，朝起きてから夜寝るまで数学・統計なしで生きていくことはありえないであろう．ではその中で OR（オペレーションズ・リサーチ）のための数学・統計で何に焦点を絞るのがよいであろうか．筆者自身は確率過程，確率微分方程式に関心をもっている．確率過程の中でもとりわけ基本的かつ重要なものはブラウン運動であり，その次はポアソン過程である（飛田 [1]）．そのブラウン運動は正規分布（ガウス分布）により特徴づけられることから，本稿では正規分布に関する話題を取り上げることにする．正規分布は自然現象，社会現象のあらゆるところで顔を出す分布であるが，その中でも統計学を中心に解説することにする．先に身のまわりには統計があふれていると書いたが，実際に統計処理が必要なものを思いつくままに書いてみることにする．毎晩のプロ野球中継に代表される視聴率，携帯電話・家電製品などの満足度調査を始めとするマーケティング，天気予報・選挙予測などの世論調査と挙げ始めればキリがないほどである．これらの調査については全数調査はもちろん困難なので，「対象者の地域はどうやって決めるのか，そして何人を選ぶのか」，「ウソを回答する人はどうやって情報を処理するのか」など調査の初めの段階で統計学が登場することになるであろう．

そこにはどのような理論が用いられているのだろうか．その一つが統計的検定である．そこで本稿では統計的検定の理論を中心に，若干の例とともに概説することにする．

すずき　あつお
名城大学都市情報学部
〒 509–0261 岐阜県可児市虹ヶ丘 4–3–3


**図 1**　ドイツの旧 10 マルク紙幣

## 2. 準備

EU における通貨統合前のドイツの 10 マルク紙幣には，ガウス (C. F. Gauss, 1777–1855) とともに正規分布の曲線が描かれている（図 1，Deutsche Bundesbank [2]）．

密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

で与えられる分布を正規分布またはガウス分布といい $N(\mu, \sigma^2)$ と表す．ここで $\mu$ は平均で実数，$\sigma^2$ は分散である．特に $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ の分布を標準正規分布という．正規分布は単峰で左右対称であり，平均と分散で完全に定まる分布である．次の定理は 2 項分布がこの正規分布で近似できるという主張をするものである．

**定理 2.1**（ド・モアブル–ラプラスの定理）．$S_n$ を 2 項分布 $B(n, p)$ に従う確率変数とする．このとき

$$Z = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

の分布の分布関数は $n \to \infty$ のとき，標準正規分布の

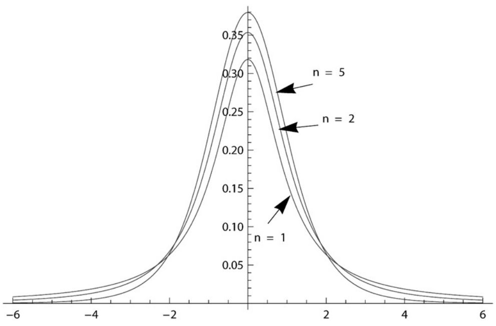


**図 2**　$t$ 分布の密度関数（自由度 $n=1,\ 2,\ 5$）

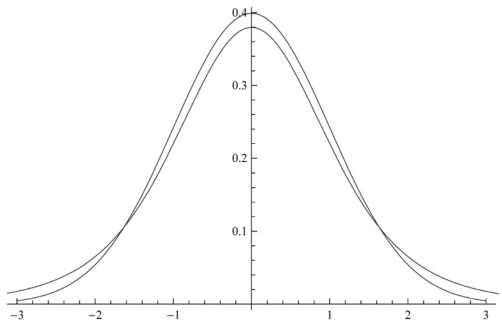

**図 3**　標準正規分布と自由度 5 の $t$ 分布の密度関数

分布関数に収束する.

**注 2.1.**　2 項分布 $B(n,p)$ に従う確率変数 $S$ を，正規分布 $N(np, np(1-p))$ に従う確率変数 $X$ で近似する場合，

$$P(a \leq S \leq b) \approx P\left(a - \frac{1}{2} \leq X \leq b + \frac{1}{2}\right)$$

とすることを半目補正（半数補正，半整数補正，連続補正）という.

スチューデントの $t$ 分布はゴセット (W. S. Gosset, 1876–1937) によるもので，彼はギネスブックやビールで有名なギネスの技師で「スチューデント」はペンネームである．その $t$ 分布の密度関数は自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ldots$ に対して

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n}B(\frac{n}{2},\frac{1}{2})}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

で与えられる．$n$ は自由度を表しており，これを自由度 $n$ の $t$ 分布といい，$t_n$ と表す．ここで $B(\alpha,\beta)$ はベータ関数

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$$

である．$n \to \infty$ のとき，この $t$ 分布の密度関数は標準正規分布の密度関数に収束する．実用上は自由度が 30 以上の場合，$t$ 分布の代わりに標準正規分布 $N(0,1)$ を用いてよいとされている.

図 2 は自由度が 1， 2， 5 の $t$ 分布の密度関数であるが，自由度が 1 の $t$ 分布はコーシー分布と呼ばれ，平均，分散は存在しない．平均値は自由度が 2 以上の場合存在し 0，分散は自由度が 3 以上の場合に存在し $n/(n-2)$ である．図 3 は標準正規分布と自由度が 5 の $t$ 分布の密度関数である．すそ野が広いほうが後者である.

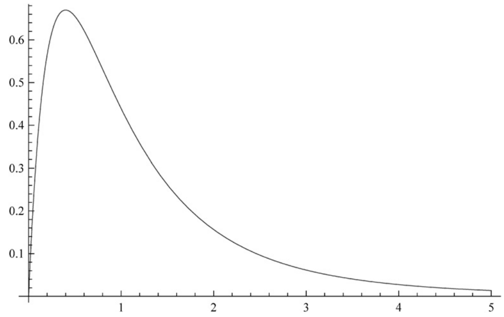

**図 4**　自由度 (4, 8) の $F$ 分布の密度関数

$F$ 分布は密度関数が自然数 $m,n$ に対して $x>0$ のとき

$$f(x) = \frac{1}{B(\frac{m}{2},\frac{n}{2})}\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} x^{m/2-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-(m+n)/2},$$

$x \leq 0$ のとき $f(x)=0$ で与えられる．これを自由度 $(m,n)$ の $F$ 分布といい，$F_{m,n}$ と表す．図 4 は自由度 (4, 8) の $F$ 分布の密度関数であるが，正規分布，$t$ 分布とちがい，左右対称ではない.

自由度 $(m,n)$ の $F$ 分布は，$n=1,2$ のときは平均は存在しない．平均値は自由度が 3 以上の場合存在し $n/(n-2)$，分散は自由度が 5 以上の場合に存在し，$2n^2(m+n-2)/m(n-2)^2(n-4)$ である.

以上から $t$ 分布と $F$ 分布は自由度により平均，分散が存在しないという共通点がある．これらの分布の関係性を表したものが次の定理である.

**定理 2.2.**　自由度 $n$ の $t$ 分布に従う確率変数 $X$ に対して，$X^2$ は自由度 $(1,n)$ の $F$ 分布 $F_{1,n}$ に従う.

  

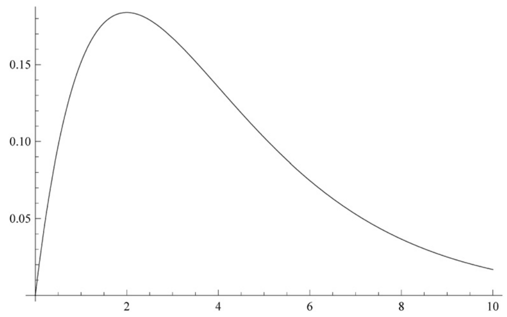

**図 5**　自由度 4 のカイ 2 乗分布の密度関数

カイ 2 乗分布は密度関数が自然数 $n$ に対して $x > 0$ のとき

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}}$$

で与えられる．これを自由度 $n$ のカイ 2 乗分布という．ここで $\Gamma(y)$ はガンマ関数

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1}e^{-x}dx, \quad y > 0$$

である．図 5 は自由度 4 のカイ 2 乗分布の密度関数である．この分布は次の定理により標準正規分布と深い関係がある．

**定理 2.3.**　$Z_1, \ldots, Z_n$ を標準正規分布 $N(0,1)$ に従う独立な確率変数列とする．このとき

$$X_n = Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$$

は自由度 $n$ のカイ 2 乗分布に従う．

## 3. 仮説検定

本稿を書いている 2015 年は国勢調査の年である．総務省統計局 [3] によれば「国勢調査は，我が国に住んでいるすべての人と世帯を対象とする国の最も重要な統計調査です．」とある．すべての人を対象としているので，人口をはじめとする各種データがきちんと把握できる．しかしながら，われわれの普段の生活，身のまわりのことに関して全数調査することは一学部内であっても時間・費用の観点から難しい．データの種類によっては，時間が経つにつれて大きく変化するものもある．全数調査を実施することにより誤差のないデータを得ることができるが，困難であることが多い．そこで，対象となる集団（母集団）から一部のデータを無作為に抽出し[1]，母集団の特性を知ろうとするのである．これを標本調査という．

以下で標本調査における標本平均，標本分散，不偏分散を定義する．

**定義 3.1.**　母集団から取り出した標本において，

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

を標本平均，

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$$

を標本分散，

$$U^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$$

を不偏分散という．$U^2$ を不偏分散と呼ぶのは，期待値が母集団の分散（母分散）に一致するためである．

**注 3.1.**　テキストによっては，不偏分散を標本分散とよぶものもあるので注意が必要である．

上で定義された標本平均，標本分散，不偏分散を始めとする標本の値から求められる量のことを統計量という．検定で用いられる統計量のことを「検定統計量」という．

母集団の分布が正規分布であるような母集団を正規母集団という．母集団がどのような分布をもつとしても，標本平均は標本の大きさ $n$ が大きくなれば正規分布に従うことが，中心極限定理で示されている．したがって，世の中に存在するさまざまな母集団を正規母集団とすることは道理に合っていると考えることができる．したがって，以降では母集団を正規母集団とする．正規母集団から取り出された大きさ $n$ の標本の標本平均，不偏分散に関して以下の定理は重要である．

**定理 3.1.**　標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$ に，$\frac{n-1}{\sigma^2}U^2$ は自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布に従う．また標本平均 $\bar{X}$ と不偏分散 $U^2$ は独立である．

まず仮説検定について基本的な考え方を述べることにする．コインを 100 回投げてみたところ，表は 61 回

[1] 無作為に抽出とは「でたらめ」にデータを抽出することではない [3]．

でた．このコインは公平なコインであろうか．公平なコインならば，表のでる確率は $p = 1/2$ であり，100 回投げたときには表が平均 $100 \times 1/2 = 50$ 回でる．今 61 回表がでたので 50 回より 11 回多い．そこで平均 50 回から 11 回以上多く表がでる確率を求めることにする．コインを投げたときには「表がでる」か「うらがでる」の 2 通りなので，表がでる回数を $X$ とすると，$X$ は 2 項分布 $B(100, 1/2)$ に従う．これは定理 2.1 のド・モアブル–ラプラスの定理により，正規分布 $N(20, 5^2)$ で近似できる．したがって，

$$\begin{aligned} P(|X-50| \geq 11) &= P\left(|Z| \geq \frac{10.5}{\sqrt{100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}}\right) \\ &= P(|Z| \geq 2.1) \\ &= 0.0358 \end{aligned}$$

となる（最初の等式は半目補正による）．この 0.0358 という値から 61 回表がでることは「めったに起らないこと」ではないかと直感的には思える．このような場合には前述のように考えるのではなく，前提である「表がでる確率が 1/2 である」（これを仮説という）を否定すると考えるのである．これが仮説検定の基本的な考え方である．

仮説検定の手順は以下のとおりである．

1. 仮説の設定
   否定されることが前提となっており，採用したくない仮説を帰無仮説といい，$H_0$ で表す．これに対して証明したい仮説を対立仮説といい，$H_1$ で表す．コイン投げの例では帰無仮説は $p = 1/2$，対立仮説は $p \neq 1/2$ である．初めにこれらを設定する．
2. 検定統計量，分布を決定する
   どのような検定を実施するかにより検定統計量 $T$（確率変数である）を選択し，分布を決定する．
3. 有意水準と棄却域を定める
   有意水準 $\alpha$ とは実数 0 と 1 の間の値をとり 5%，1%がよく用いられる．棄却域とは検定統計量の実現値の中でめったに起こらない（有意水準を越える）ものと考えられるものの領域であり，

   $$P(T \in R) = \alpha$$

   を満たす $R$ である．この棄却域を対立仮説 $H_1$ をもとに定める．棄却域は両側あるいは片側に定める．
4. 検定統計量を求める
   母集団から抽出した標本から検定統計量 $T$ の実現値 $t$ を求め，棄却域 $R$ に入るかどうかを調べる．
5. 結論
   検定統計量 $T$ を求めた結果，$t$ の値が棄却域に入っていれば，めったに起こらないことが起きたと考える．このときには帰無仮説が誤っていたとするのである（帰無仮説の棄却）．

本節以降で具体的な仮説検定について説明するが，検定において重要な役割を果たす定理は節の最後に述べる．定理の証明などは参考文献 [4]〜[10] を参照してほしい．

### 3.1 母平均の検定（母分散既知）

母集団から取り出した標本の平均が，母平均と差があるかどうかを調べる検定について考える．本節では，母集団の分散 $\sigma^2$ が既知であるとする[2]．この場合の仮説検定において，帰無仮説は

$$H_0 : \mu = \mu_0,$$

対立仮説 $H_1$ は両側検定ならば

$$H_1 : \mu \neq \mu_0,$$

片側検定ならば

$$H_1 : \mu > \mu_0 \quad \text{または} \quad \mu < \mu_0$$

で与えられる．定理 3.1 より，標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$ に，これを標準化した

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う[3]．この $Z$ を検定統計量として用いる．母分散が既知の場合，両側検定ならば棄却域 $R$ は

$$R = \{|z| \geq z(\alpha/2)\}$$

となる．ここで $z$ は $Z$ の実現値，$z(\alpha/2)$ は標準正規分布 $N(0,1)$ の上側 $\alpha/2$ 点である．有意水準が 5%のときは $z(0.05/2) = 1.96$ である．次に求めた実現値 $z$ が $R$ に入るかどうかで帰無仮説 $H_0$ が棄却されるのか，あるいはされないのかを決定する．

1. $z \in R$ の場合，$H_0$ は棄却されて $H_1$ が採択される．
2. $z \notin R$ の場合，$H_0$ は棄却されない．

片側検定ならば棄却域 $R$ は

$$R = \{z \leq -z(\alpha)\} \text{ または } R = \{z \geq z(\alpha)\}$$

となる．

[2] 現実には分散が既知であることはあまりないであろう．
[3] この検定を $z$ 検定ということもある．

  

**例 3.1.** セ・リーグの球団 A の 70 人の選手の中から 10 人をランダムに選んだところ，平均身長は 181.8 cm であった．セ・リーグの全選手の平均値は 181.1 cm，分散が 28.77 であることがわかっている（データは [11] より）．このとき球団 A の選手の平均身長はセ・リーグ平均と異なっているか．

### 3.2 母平均の検定（母分散未知）

前節では母分散は既知であるとしたが，本節では母分散が未知の場合について考える．検定の流れ，帰無仮説，対立仮説については母分散が既知の場合と同様である．母分散が未知なので，不偏分散 $U^2$ を用いて，

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{U/\sqrt{n}}$$

を求めると，定理 3.2 から $T$ は自由度 $n-1$ の $t$ 分布に従う．この検定を $t$ 検定という．また，標本の大きさ $n$ が大きい場合には，$t$ 分布は標準正規分布 $N(0,1)$ で近似できる．

棄却域は両側検定の場合は

$$R = \{|t| \geq t_{n-1}(\alpha/2)\}$$

となる．ここで $t$ は $T$ の実現値，$t_{n-1}(\alpha/2)$ は自由度 $n-1$ の $t$ 分布の上側 $\alpha/2$ 点である．$t$ が棄却域に入るかを判断する．

1. $t \in R$ の場合, $H_0$ は棄却されて $H_1$ が採択される．
2. $t \notin R$ の場合，$H_0$ は棄却されない．

片側検定ならば棄却域 $R$ は

$$R = \{t \leq -t_{n-1}(\alpha)\} \text{ または } R = \{t \geq t_{n-1}(\alpha)\}$$

となる．

**定理 3.2.** $X_1, \ldots, X_n$ を正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの標本とする．標本平均を $\bar{X}$，不偏分散を $U^2$ とする．このとき

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{U/\sqrt{n}}$$

は自由度 $n-1$ の $t$ 分布に従う．

**例 3.2.** ある授業の定期試験の平均点は 59.1 点であった．この中で研究室の学生の得点は

19，30，97，79，22，93，97

であり平均は 62.4 点であった．研究室の学生の平均点は受講生のそれよりも高いと考えられるか．

以下では，母平均の差に関する検定について述べることにする．

### 3.3 母平均の差の検定（母分散既知）

本節での検定は，正規母集団が二つあり，その母集団の平均が等しいかどうかを調べる検定である．この場合，帰無仮説は

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

となる．

初めに母分散が既知の場合を考える．$X_1, \ldots, X_{n_1}$ を $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ からの標本，$Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ を $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ からの標本とする．このとき帰無仮説は

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

である．二つの母集団からの標本平均をそれぞれ

$$\bar{X} = \frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1} X_k, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n_2}\sum_{k=1}^{n_2} Y_k$$

とする．このとき定理 3.1 より $\bar{X}, \bar{Y}$ は正規分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2/n_1), N(\mu_2, \sigma_2^2/n_2)$ にそれぞれ従う．さらに以下の定理 3.3 正規分布の再生性から $\bar{X} - \bar{Y}$ は正規分布 $N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2)$ に従う．したがって，二つの正規母集団の母平均が等しいという帰無仮説 $H_0$ のもとで $\bar{X} - \bar{Y}$ は正規分布 $N(0, \sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2)$ に従うので，

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う[4]．これが検定統計量である．棄却域は両側検定の場合

$$R = \{|z| \geq z(\alpha/2)\},$$

片側検定の場合は

$$R = \{z \leq -z(\alpha)\} \text{ または } R = \{z \geq z(\alpha)\}$$

とすればよい．

**定理 3.3**（正規分布の再生性）**.** $X, Y$ をそれぞれ正規分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$ に従う独立な確率変数とする．このとき和 $X+Y$ は $N(\mu_1+\mu_2, \sigma_2^2+\sigma_2^2)$ に従う．

**例 3.3.** 今シーズンにおけるあるプロ野球の球団 $A$, $B$ の選手の身長はそれぞれ分散 32.13, 34.68 の正規分布に従っていることがわかっている．ランダムに選んだ球団 $A$ の選手 10 人の平均身長は 181.8 cm，$B$ は 179.9 cm

[4] 本来はこの事実も定理として証明すべきことである．

であった．両球団の選手の身長に差はあるか．

### 3.4　母平均の差の検定（母分散未知で等分散）

前節とは異なり，二つの正規母集団の母分散が未知であるが等しい，すなわち $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ の場合である．しかしながらこのときは $\sigma^2$ が未知のため前節と同じ検定統計量を用いることができない．そのためここでは不偏分散

$$U_i^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{k=1}^{n_i}(X_k - \bar{X})^2, \quad i = 1, 2$$

を用いることになる．はじめに，定理 3.1 から

$$\frac{n_1-1}{\sigma^2}U_1^2, \quad \frac{n_2-1}{\sigma^2}U_2^2$$

は自由度 $n_1 - 1$，$n_2 - 1$ のカイ 2 乗分布にそれぞれ従う．したがって，以下のカイ 2 乗分布の再生性に関する定理 3.4 より

$$\frac{n_1-1}{\sigma^2}U_1^2 + \frac{n_2-1}{\sigma^2}U_2^2$$

は自由度 $n_1 + n_2 - 2$ のカイ 2 乗分布に従う．

**定理 3.4**（カイ 2 乗分布の再生性）**.** $X, Y$ をそれぞれ自由度 $m, n$ のカイ 2 乗分布に従う独立な確率変数とする．このとき和 $X + Y$ は自由度 $m + n$ のカイ 2 乗分布に従う．

ゆえに以下の定理 3.5 と母分散が等しいことから

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\frac{(n_1-1)U_1^2 + (n_2-1)U_2^2}{n_1+n_2-2}}}$$

となり，$T$ は自由度 $n_1 + n_2 - 2$ の $t$ 分布に従う．上記の検定統計量 $T$ は母分散 $\sigma^2$ には依存しないことがわかる．以降の棄却域，棄却・採択の議論は前節と同様である．

**定理 3.5.** $X$ を標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数，$Y$ を自由度 $n$ のカイ 2 乗分布に従う確率変数とし，$X$ と $Y$ は独立であるとする．このとき

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

は自由度 $n$ の $t$ 分布に従う．

### 3.5　等分散性の検定

前節では二つの正規母集団の分散が等しいものとして議論した．しかしながら，等分散性を仮定してよいかどうか確認しなければならないこともある．それが本節の等分散性の検定である．この場合，帰無仮説が

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

となる検定である．定理 3.6 より，$F$ を検定統計量とする．以降の棄却域，仮説の棄却・採択についての議論はこれまでとほとんど同様である．

**定理 3.6.** 2 つの正規母集団 $N(\mu_1, \sigma^2), N(\mu_2, \sigma^2)$ から取り出した標本を $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n$ とする．このときそれぞれの不偏分散を $U_1^2, U_2^2$ とすると，これらの比

$$F = \frac{U_1^2}{U_2^2}$$

は自由度 $(m-1, n-1)$ の $F$ 分布 $F_{m-1,n-1}$ に従う．

### 3.6　ウェルチの $t$ 検定

最後は二つの正規母集団の母分散が未知であり，等分散であることを仮定しない一般的な場合についてである．これはベーレンズ–フィッシャー問題と呼ばれている．この問題については近似的な解法が提案されており，その中でよく知らているのがウェルチの $t$ 検定である[5]．

**注 3.2.** 標本の大きさ $n_1, n_2$ が十分に大きい場合は，母分散の代わりに不偏分散を用いると，検定統計量が標準正規分布で近似できる．したがって母分散が既知の場合に帰着することができる．

ウェルチの検定において，帰無仮説 $H_0$ は $\mu_1 = \mu_2$ であり，検定統計量 $W$ は，近似的に自由度 $c$ の $t$ 分布と考えて

$$W = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{U_1^2}{n_1} + \frac{U_2^2}{n_2}}}$$

とする．自由度 $c$ は

$$\frac{\left(\frac{U_1^2}{n_1} + \frac{U_2^2}{n_2}\right)^2}{c} = \frac{\left(\frac{U_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{U_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}$$

[5] 等分散性の検定を行い，その結果によって $t$ 検定あるいはウェルチの $t$ 検定を実施するのではなく，最初からウェルチの $t$ 検定を用いるのがよいという議論があるようである．

  

から求めることができる．

## 4. さいごに

現実の社会において統計学の守備範囲は驚くほど広い．たとえば損害保険数理，生命保険数理，年金数理の分野では，保険料算出，大規模自然災害リスク解析には統計学は欠かせないものであり，これらの仕事を行うアクチュアリーの試験に数学（確率・統計）があるのは当然のことであろう．また映画「マネー・ボール」で描かれているように，野球のデータを統計的に解析し，戦略などに用いるセイバーメトリクスという手法もある．この他にも身のまわりには仕事，趣味，普段の何気ない生活に統計があふれている．したがって，身のまわりに存在する多くの問題を解決するには，統計学を含むオペレーションズ・リサーチの手法が重要な役割を果たすであろう．

## 参考文献

[1] 飛田武幸，『確率論の基礎と発展』，共立出版，2011.
[2] Deutsche Bundesbank（ドイツ銀行），
http://www.bundesbank.de/Navigation/EN/Home/
[3] 総務省統計局ホームページ，
http://www.stat.go.jp/data/kokusei/2015/
http://www.stat.go.jp/teacher/c2hyohon.htm
[4] 稲垣宣生，『数理統計学』，裳華房，1990.
[5] 尾畑伸明，『数理統計学の基礎』，共立出版，2014.
[6] 楠岡成雄，『確率・統計』，森北出版，1995.
[7] 白石高章，『統計科学の基礎』，日本評論社，2012.
[8] 白旗慎吾，『統計解析入門』，共立出版，1992.
[9] 松本裕行，宮原孝夫，『数理統計入門』，学術図書出版社，1990.
[10] 尾畑伸明，『確率統計要論』，牧野書店，2007.
[11] 日本野球機構オフィシャルサイト，
http://www.npb.or.jp/