Newton の不等式を用いたオッズ問題の解析

松井　知己，穴太　克則

本稿では，オッズ問題とその変種に対し，その最適戦略と勝利確率の下界について議論する．特に，いくつかの変種を特殊ケースとして含む一般的な問題が，Newton の不等式を用いることによって統一的に議論できることを示す．

キーワード：古典的秘書問題，オッズ問題，Newton の不等式

1. はじめに

確率変数の列 $X_1, X_2, \ldots X_N$ を，独立なベルヌイ試行の列とする．各確率変数は成功または失敗のどちらかの値をとるものとする．本稿では，確率変数 X_i の値が成功のときは $X_i = 1$ と表し，失敗のときは $X_i = 0$ と表す．以下では，確率変数 X_i の成功確率を $p_i = \Pr[X_i = 1]$ と表し，議論の簡略化のために $[\forall i, 0 < p_i < 1]$ が成り立つと仮定する．さらに失敗確率 $q_i = \Pr[X_i = 0]$ とオッズ $r_i = p_i/q_i$ を定義する．

すべての成功確率 $(p_1, p_2, \ldots, p_N)$ が与えられたとして，以下のような（プレイヤが一人の）ゲームについて考えよう．確率変数の実現値は $X_1, X_2, \ldots$ の順に逐次得られるとし，プレイヤは各確率変数の観測直後にそれを『選択する』か『選択しない』のどちらかを選ばねばならない[1]．Bruss の提唱したオッズ問題では，選択回数は（高々）1 回とし，最後の成功に対応する確率変数を選択したならば，プレイヤは勝利したと定義する．オッズ問題の目的は，プレイヤの勝利確率を最大化する方法，最適停止規則と呼ぶ，を求めることである．

Bruss は [1] において，最適停止規則が閾値戦略で得られることを示した．閾値戦略とは，特定のインデックス i^* に対し『X_{i^*} 以降の確率変数で最初に 1 の値を取るものを選択する』というものである．Bruss [1] は，閾値を $i^* = \min\{i \in \{1, 2, \ldots, N\} \mid r_i + r_{i+1} + \cdots + r_N < 1\}$ と定めた閾値戦略が最適停止規則となることを示した（この主定理がそのまま論文タイトルになっている！）．

オッズ問題において，成功確率を $p_i = 1/i$ と定めた問題は，古典的秘書問題と本質的に等価であることが知られている．Bruss [2] では，$r_1 + r_2 + \cdots + r_N \geq 1$ ならば，最適停止規則を用いたときの勝利確率は必ず $1/e$ 以上であることが示された．古典的秘書問題において人数 (N) が大きくなると，最適停止規則を用いた際の勝利確率は $1/e$ に収束することが知られており，上記の下界を（漸近的に）達成している．

2. 問題

オッズ問題については，様々な変種が研究されている．Tamaki [3] は，与えられた正整数 ℓ に対し，選択回数は（高々）1 回とし，最後から ℓ 番目までの（ℓ 個の）成功のうちどれかに対応する確率変数を選択したならば勝利すると定義した問題について議論している．Bruss and Paindavein [4] は，与えられた正整数 ℓ に対し，選択回数は（高々）ℓ 回とし，最後の成功，最後から 2 番目の成功，$\ldots$，最後から ℓ 番目までの成功，これらすべてに対応する確率変数を選択したならば勝利すると定義した問題について議論した．この問題は，選択回数を（高々）1 回とし，最後からちょうど ℓ 番目の成功に対応する確率変数を選択したならば，勝利したと定義する問題と等価である．

本稿で議論するのは，オッズ問題に対する次のような変種である．正整数 ℓ と k が与えられ，これは $1 \leq k \leq \ell < N$ を満たすとする．本稿で扱う問題は，オッズ問題において，選択回数は（高々）1 回とし，『最後から k 番目の成功，最後から $k+1$ 番目の成功，$\ldots$，最後から ℓ 番目までの成功』（$\ell - k + 1$ 個の成功）のう

まつい　ともみ
東京工業大学大学院社会理工学研究科社会工学専攻
〒 152–8550 東京都目黒区大岡山 2–12–1
あのう　かつのり
芝浦工業大学システム理工学部数理科学科
〒 337–8570 埼玉県さいたま市見沼区大字深作 307

[1] 本来は『停止する』と『停止しない』であるが，本稿では一般化した問題も同様に扱うために，選択という単語を用いる．

ち，どれかに対応する確率変数を選択したならば勝利すると定義した問題である．上記の問題は，設定が人工的で不自然に感じられるかもしれないが，$k=\ell=1$ とすれば Bruss [1]，$k=1$ とすれば Tamaki [3]，$k=\ell$ とすれば Bruss and Paindavein [4] の研究した問題に対応しており，これら 3 つの問題を特殊ケースとして含む一般的な問題である．

あるいは上記の問題は，選択回数を（高々）k 回としたとき，選択した確率変数すべてが，最後の成功，最後から 2 番目の成功, ...，最後から ℓ 番目までの成功, の中に含まれているとき勝利とした問題と本質的に等価である．例えば $N=8$，$k=3$，$\ell=4$ の場合を考えてみよう．確率変数列 $(X_1, X_2, \ldots, X_8)$ の実現値が $(0,1,1,0,0,1,1,1)$ であったとき，プレイヤは集合 $\{X_3, X_6, X_7, X_8\}$ の中から 3 つを選択すれば勝利することができる．プレイヤが勝利したならばプレイヤが最初に選択したのは $\{X_3, X_6\}$ のどちらかである．また，プレイヤの最初の選択が $\{X_3, X_6\}$ のどちらかであれば，それ以降の確率変数で実現値が成功であるものを，3 つまで連続して選択すればよい．この戦略を用いた際は，プレイヤが勝利したときに選択していた確率変数の集合は $\{X_3, X_6, X_7\}$ または $\{X_6, X_7, X_8\}$ のどちらかとなる．ゆえに，この問題においてプレイヤが勝利することのできる必要十分条件は，プレイヤの最初の選択が $\{X_3, X_6\}$ のどちらかとなることである．

3. Newton の不等式

正整数 m, N は $1 \le m \le N$ を満たすとしたとき，任意の N-次元ベクトル $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_N) \in \mathbb{R}^N$ に対して，m 次基本対称多項式（関数）$\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{r})$ を

$$\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{r}) = \sum_{\substack{B \subseteq \{1,2,\ldots,N\} \\ \text{and } |B|=m}} \prod_{i \in B} r_i, \qquad (1)$$

と定義する．上記の定義において，関数の項数は $\binom{N}{m}$ 個となっていることに注意されたい．特に $\boldsymbol{e}_0(\boldsymbol{r}) = 1$ と定める．次に m 次基本対称平均を

$$S_m(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{r})}{\binom{N}{m}} \quad (\forall m \in \{1,2,\ldots,N\})$$

と定義する．さらに $S_0(\boldsymbol{r}) = 1$ とする．混乱の恐れがないときは $S_m(\boldsymbol{r})$ を S_m と略記する．Newton は以下の不等式を示した．

定理 1. (Newton's inequalities [5]) 任意の非負ベクトル $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}_+^N$ と，任意の整数 $1 < \forall m < N$ において，$S_m(\boldsymbol{r})^2 \ge S_{m-1}(\boldsymbol{r}) S_{m+1}(\boldsymbol{r})$, が成り立つ．

Newton の不等式より直ちに以下が得られる．

補題 1. 任意の正ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{r}} = (\widetilde{r}_1, \widetilde{r}_2, \ldots, \widetilde{r}_N) > \boldsymbol{0}$ と，$1 \le m \le \ell \le N$ を満たす正整数の対 (m, ℓ) に対し，$\dfrac{\boldsymbol{e}_{\ell-1}(\widetilde{\boldsymbol{r}})}{\boldsymbol{e}_{m-1}(\widetilde{\boldsymbol{r}})} \ge \dfrac{\boldsymbol{e}_{\ell}(\widetilde{\boldsymbol{r}})}{\boldsymbol{e}_{m}(\widetilde{\boldsymbol{r}})}$ が成り立つ．

略証. Newton の不等式より中点対数凹性 $\log(S_{m'}) \ge (1/2)(\log(S_{m'-1}) + \log(S_{m'+1}))$ が得られ，これより直ちに以下が導かれる：

$$\frac{\log(S_m) + \log(S_{\ell-1})}{2} \ge \frac{\log(S_{m-1}) + \log(S_\ell)}{2},$$
$$S_m S_{\ell-1} \ge S_{m-1} S_\ell,$$
$$\frac{\binom{N}{m-1} \boldsymbol{e}_{\ell-1}(\widetilde{\boldsymbol{r}})}{\binom{N}{\ell-1} \boldsymbol{e}_{m-1}(\widetilde{\boldsymbol{r}})} = \frac{S_{\ell-1}}{S_{m-1}} \ge \frac{S_\ell}{S_m} = \frac{\binom{N}{m} \boldsymbol{e}_{\ell}(\widetilde{\boldsymbol{r}})}{\binom{N}{\ell} \boldsymbol{e}_{m}(\widetilde{\boldsymbol{r}})},$$
$$\frac{\boldsymbol{e}_{\ell-1}(\widetilde{\boldsymbol{r}})}{\boldsymbol{e}_{m-1}(\widetilde{\boldsymbol{r}})} \ge \left(\frac{N-m+1}{N-\ell+1}\right)\left(\frac{\ell}{m}\right) \frac{\boldsymbol{e}_{\ell}(\widetilde{\boldsymbol{r}})}{\boldsymbol{e}_{m}(\widetilde{\boldsymbol{r}})} \ge \frac{\boldsymbol{e}_{\ell}(\widetilde{\boldsymbol{r}})}{\boldsymbol{e}_{m}(\widetilde{\boldsymbol{r}})}. \ \blacksquare$$

補題 2. 任意の正ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{r}} = (\widetilde{r}_1, \widetilde{r}_2, \ldots, \widetilde{r}_N) > \boldsymbol{0}$ と，$0 \le m \le \ell \le N$ を満たす正整数の対 (m, ℓ) に対し，$\dfrac{\boldsymbol{e}_{\ell}(\widetilde{\boldsymbol{r}})}{\boldsymbol{e}_{m}(\widetilde{\boldsymbol{r}})} \ge \dfrac{\boldsymbol{e}_{\ell}(\widetilde{\boldsymbol{r}}_{-1})}{\boldsymbol{e}_{m}(\widetilde{\boldsymbol{r}}_{-1})}$ が成り立つ．ただし $\widetilde{\boldsymbol{r}}_{-1} = (\widetilde{r}_2, \ldots, \widetilde{r}_N)$ と定義する．

略証. 補題 1 を正ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{r}}_{-1}$ に適用すると $\dfrac{\boldsymbol{e}_{\ell-1}(\widetilde{\boldsymbol{r}}_{-1})}{\boldsymbol{e}_{m-1}(\widetilde{\boldsymbol{r}}_{-1})} \ge \dfrac{\boldsymbol{e}_{\ell}(\widetilde{\boldsymbol{r}}_{-1})}{\boldsymbol{e}_{m}(\widetilde{\boldsymbol{r}}_{-1})}$ が得られ，以下が導かれる：

$$\frac{\boldsymbol{e}_{\ell}(\widetilde{\boldsymbol{r}})}{\boldsymbol{e}_{m}(\widetilde{\boldsymbol{r}})} = \frac{\widetilde{r}_1\, \boldsymbol{e}_{\ell-1}(\widetilde{\boldsymbol{r}}_{-1}) + \boldsymbol{e}_{\ell}(\widetilde{\boldsymbol{r}}_{-1})}{\widetilde{r}_1\, \boldsymbol{e}_{m-1}(\widetilde{\boldsymbol{r}}_{-1}) + \boldsymbol{e}_{m}(\widetilde{\boldsymbol{r}}_{-1})} \ge \frac{\boldsymbol{e}_{\ell}(\widetilde{\boldsymbol{r}}_{-1})}{\boldsymbol{e}_{m}(\widetilde{\boldsymbol{r}}_{-1})}. \ \blacksquare$$

上記の補題を用いて，次節では最適停止戦略について議論する．

4. 最適停止戦略

本節では，オッズの部分ベクトル $(r_i, r_{i+1}, \ldots, r_N)$ を $\boldsymbol{r}^{[i]}$ と記し，確率 $\Pr[k \le X_i + \cdots + X_N \le \ell]$ を $\mathrm{P}^{[i]}$ と記す，このとき明らかに

$$\mathrm{P}^{[i]} = q_i q_{i+1} \cdots q_N \sum_{m=k}^{\ell} \boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{r}^{[i]}) = \frac{\sum_{m=k}^{\ell} \boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{r}^{[i]})}{\prod_{j=i}^{N}(1+r_j)}$$

が成り立っている．ここで，添え字 i_* を

$$i_* \stackrel{\text{def.}}{=} \min\left\{ i \,\middle|\, 1 \le i \le N-\ell,\ 1 > \frac{\boldsymbol{e}_\ell(\boldsymbol{r}^{[i+1]})}{\boldsymbol{e}_{k-1}(\boldsymbol{r}^{[i+1]})} \right\} \qquad (2)$$

と定義し，閾値と呼ぶ．ただし，上記の min が空集合に対するものであった際は $i_* \stackrel{\text{def.}}{=} N-\ell+1$ とする．

表 1 既存の結果および，本稿で示す結果

モデル	条件	下界		閾値の定義式 ($\star$)	
Bruss [1]	$\ell=k=1$	e^{-1}	[2]	$\frac{r_i+r_{i+1}+\cdots+r_N}{1} = \frac{\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{e}_0(\boldsymbol{r})} < 1$	[1]
B&P(†) [4]	$\ell=k\geq 1$	$\frac{\ell^\ell}{(\ell!)e^\ell}$	[7]	$\frac{\boldsymbol{e}_\ell(\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{e}_{\ell-1}(\boldsymbol{r})} < 1$	[4]
Tamaki [3]	$\ell\geq k=1$	$\exp\left(-(\ell!)^{\frac{1}{\ell}}\right)\sum_{m=1}^{\ell}\frac{(\ell!)^{\frac{m}{\ell}}}{m!}$	[6]	$\frac{\boldsymbol{e}_\ell(\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{e}_0(\boldsymbol{r})} < 1$	[3]
本稿	$\ell\geq k\geq 1$	(‡ を参照)	[7]	$\frac{\boldsymbol{e}_\ell(\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{e}_{k-1}(\boldsymbol{r})} < 1$	[7]

† Bruss and Paindaveine.

‡ $\exp\left(-\left(\frac{\ell!}{(k-1)!}\right)^{\frac{1}{\ell-k+1}}\right)\sum_{m=k}^{\ell}\left(\frac{1}{m!}\left(\frac{\ell!}{(k-1)!}\right)^{\frac{m}{\ell-k+1}}\right)$.

$\star$ 最適戦略は，閾値の定義式を満たす最小の i を用いた閾値戦略で得られる，ただしここで $\boldsymbol{r}=(r_i, r_{i+1}, \ldots, r_N)$ である．

このとき，以下の性質が成り立つ．

補題 3. $\mathrm{P}^{[1]} \leq \mathrm{P}^{[2]} \leq \cdots \leq \mathrm{P}^{[i_*-1]} \leq \mathrm{P}^{[i_*]} > \mathrm{P}^{[i_*+1]} > \cdots > \mathrm{P}^{[N-\ell+1]}$.

略証. 閾値 i_* の定義と補題 2 より

$$\frac{\boldsymbol{e}_\ell(\boldsymbol{r}^{[1]})}{\boldsymbol{e}_{k-1}(\boldsymbol{r}^{[1]})} \geq \frac{\boldsymbol{e}_\ell(\boldsymbol{r}^{[2]})}{\boldsymbol{e}_{k-1}(\boldsymbol{r}^{[2]})} \geq \cdots \geq \frac{\boldsymbol{e}_\ell(\boldsymbol{r}^{[i_*]})}{\boldsymbol{e}_{k-1}(\boldsymbol{r}^{[i_*]})} \geq 1$$
$$\text{かつ } 1 > \frac{\boldsymbol{e}_\ell(\boldsymbol{r}^{[i_*+1]})}{\boldsymbol{e}_{k-1}(\boldsymbol{r}^{[i_*+1]})} \geq \cdots \geq \frac{\boldsymbol{e}_\ell(\boldsymbol{r}^{[N-\ell+1]})}{\boldsymbol{e}_{k-1}(\boldsymbol{r}^{[N-\ell+1]})}.$$

が直ちに得られ，

$$\boldsymbol{e}_{k-1}(\boldsymbol{r}^{[i+1]}) - \boldsymbol{e}_\ell(\boldsymbol{r}^{[i+1]}) \begin{cases} \leq 0 & (0 \leq \forall i \leq i_*-1), \\ > 0 & (i_* \leq \forall i \leq N-\ell). \end{cases}$$

が導かれる．これより，$\forall i \in \{1, 2, \ldots, N-\ell\}$ において

$$\begin{aligned}\mathrm{P}^{[i]} - \mathrm{P}^{[i+1]} &= \frac{\sum_{m=k}^{\ell}\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{r}^{[i]})}{(1+r_i)\cdots(1+r_N)} - \mathrm{P}^{[i+1]} \\ &= \frac{r_i\left(\boldsymbol{e}_{k-1}(\boldsymbol{r}^{[i+1]}) - \boldsymbol{e}_\ell(\boldsymbol{r}^{[i+1]})\right)}{(1+r_i)\cdots(1+r_N)} \\ &\begin{cases} \leq 0 \ (0 \leq i \leq i_*-1), \\ > 0 \ (i_* \leq i \leq N-\ell), \end{cases}\end{aligned}$$

が成り立つ． ■

確率の列 $(\mathrm{P}^{[1]}, \mathrm{P}^{[2]}, \ldots, \mathrm{P}^{[N-\ell+1]})$ の単峰性が上記の補題で示されたが，これより，閾値 i_* を用いた閾値戦略が最適停止戦略となることは，直観的に理解できるだろう．

定理 2. 閾値 i_* に対し，X_{i_*} 以降で最初に成功となる確率変数を選択する戦略は，最適停止戦略である．またこのときの勝利確率は $\mathrm{P}^{[i_*]}$ である．

この定理の証明は，紙面の都合で省略する．

5. 勝利確率の下界

本節では，定理 2 で得られた最適停止規則を用いた際の勝利確率の下界について議論する．

Newton の不等式より，以下の補題が導かれる．

補題 4. 任意の正ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{r}} = (\widetilde{r}_1, \widetilde{r}_2, \ldots, \widetilde{r}_N) > 0$ に対し，以下が成り立つ：

$$S_{k-1}(\widetilde{\boldsymbol{r}})^{\ell-m} \geq S_m(\widetilde{\boldsymbol{r}})^{\ell-k+1} S_\ell(\widetilde{\boldsymbol{r}})^{k-1-m}, \quad \forall m \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}, \tag{3}$$
$$S_m(\widetilde{\boldsymbol{r}})^{\ell-k+1} \geq S_{k-1}(\widetilde{\boldsymbol{r}})^{\ell-m} S_\ell(\widetilde{\boldsymbol{r}})^{m-k+1}, \quad \forall m \in \{k, k+1, \ldots, \ell\}, \tag{4}$$
$$S_\ell(\widetilde{\boldsymbol{r}})^{m-k+1} \geq S_{k-1}(\widetilde{\boldsymbol{r}})^{m-\ell} S_m(\widetilde{\boldsymbol{r}})^{\ell-k+1}, \quad \forall m \in \{\ell+1, \ell+2, \ldots, N\}. \tag{5}$$

略証. 数列 $(\log(S_0), \ldots, \log(S_N))$ の凹性が Newton の不等式より導かれ，これより

$$\log(S_{k-1}) \geq \frac{(\ell-k+1)\log(S_m) + (k-1-m)\log(S_\ell)}{\ell-m}, \quad \forall m \in \{0, 1, \ldots, k-1\},$$
$$\log(S_m) \geq \frac{(\ell-m)\log(S_{k-1}) + (m-k+1)\log(S_\ell)}{\ell-k+1}, \quad \forall m \in \{k, k+1, \ldots, \ell\},$$
$$\log(S_\ell) \geq \frac{(m-\ell)\log(S_{k-1}) + (\ell-k+1)\log(S_m)}{m-k+1}, \quad \forall m \in \{\ell+1, \ell+2, \ldots, N\},$$

が得られ，直ちに不等式 (3)，(4) と (5) が導かれる． ■

定理 3. 確率変数列 $X_1, X_2, \ldots, X_N$ 上に定義されたオッズ問題において，選択回数が（高々）1 回であり，選択された変数が最後から m 番目の成功としたとき，m が $k \leq m \leq \ell$ を満たすならば勝利とする．さらに (1) $r_i > 0$ $(\forall i)$, (2) $1 \leq k \leq \ell < N$, (3) $1 > \frac{\boldsymbol{e}_\ell(\bar{\boldsymbol{r}})}{\boldsymbol{e}_{k-1}(\bar{\boldsymbol{r}})}$ ただし $\bar{\boldsymbol{r}} = (r_{N-\ell+1}, r_{N-\ell+2}, \ldots, r_N) \in \mathbb{R}^\ell$ かつ (4) $\frac{\boldsymbol{e}_\ell(\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{e}_{k-1}(\boldsymbol{r})} \geq 1$ が成り立つと仮定する．このとき，最適停止規則を用いた際の勝利確率は

$$\frac{\displaystyle\sum_{m=k}^{\ell} \binom{N}{m} \theta^m}{(1+\theta)^N} \quad ただし \quad \theta = \left(\frac{\binom{N}{k-1}}{\binom{N}{\ell}} \right)^{\frac{1}{\ell-k+1}}$$

以上である．

略証. 最適停止規則として (2) で定義された閾値を用いた閾値戦略を採用するならば，確率変数の部分列 $X_1, X_2, \ldots, X_{i_*-1}$ を元の問題から消去しても，勝利確率は変わらない．すなわち

$$\boldsymbol{e}_{k-1}(r_2, r_3, \ldots, r_N) - \boldsymbol{e}_\ell(r_2, r_3, \ldots, r_N) > 0 \quad (6)$$
$$\boldsymbol{e}_{k-1}(r_1, r_2, \ldots, r_N) - \boldsymbol{e}_\ell(r_1, r_2, \ldots, r_N) \leq 0 \quad (7)$$

が成り立つ場合のみ議論すればよい．仮定 (6) と (7)，の下では，閾値 $i_* = 1$ とした閾値戦略が最適停止戦略であり，その際の勝利確率は

$$V_N \overset{\text{def.}}{=} \frac{\sum_{m=k}^{\ell} \boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{r})}{(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_N)}$$

となる．ゆえに，最適停止戦略を用いたときの勝利確率の下限は，以下の最適化問題

$$\begin{aligned}
\text{P1} \quad \min.\ V_N &\overset{\text{def.}}{=} \frac{\sum_{m=k}^{\ell} \boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{r})}{(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_N)} \\
\text{s. t. } & 0 < r_i \quad (\forall i \in \{1, 2, \ldots, N\}), \\
& \boldsymbol{e}_{k-1}(\boldsymbol{r}_{-1}) - \boldsymbol{e}_\ell(\boldsymbol{r}_{-1}) > 0, \qquad (8) \\
& \boldsymbol{e}_{k-1}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{e}_\ell(\boldsymbol{r}) \leq 0, \qquad (9)
\end{aligned}$$

の最適値である，ただし上記において $\boldsymbol{r}_{-1} = (r_2, r_3, \ldots, r_N)$ とする．上記の問題の最適解として，制約式 (9) を等式で満たすものが存在することを示す．問題 P1 の許容解 $\boldsymbol{r'}$ は，$\boldsymbol{e}_{k-1}(\boldsymbol{r'}) - \boldsymbol{e}_\ell(\boldsymbol{r'}) < 0$ を満たしていると仮定する．このとき，制約式 (9) を等式で満たす許容解で，目的関数値がさらに小さなものがあることを示そう．一変数関数 $f(r) : [0, r'_1] \to \mathbb{R}$ を導入し

$$f(r) = \boldsymbol{e}_{k-1}(r, r'_2, r'_3, \ldots, r'_N) - \boldsymbol{e}_\ell(r, r'_2, r'_3, \ldots, r'_N)$$

と定義する．これは変数 $\{r'_2, r'_3, \ldots, r'_N\}$ を固定して得られる関数である．解 $\boldsymbol{r'}$ の仮定と性質 (8) より

$$\begin{aligned}
f(r'_1) &= \boldsymbol{e}_{k-1}(\boldsymbol{r'}) - \boldsymbol{e}_\ell(\boldsymbol{r'}) < 0 \\
&< \boldsymbol{e}_{k-1}(\boldsymbol{r'}_{-1}) - \boldsymbol{e}_\ell(\boldsymbol{r'}_{-1}) = f(0)
\end{aligned}$$

が成り立ち，関数 $f(r)$ の連続性と中間値の定理を用いて $[\exists r'' \in (0, r'_1), f(r'') = 0]$ が得られる．このとき明らかに $(r'', r'_2, r'_3, \ldots, r'_N)$ は問題 P1 の許容解である．解 $\boldsymbol{r'}$ に対応する目的関数値 V'_N の値は

$$\begin{aligned}
V'_N &= \frac{\displaystyle\sum_{m=k}^{\ell} \Big(\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{r'}_{-1}) + r'_1 \boldsymbol{e}_{m-1}(\boldsymbol{r'}_{-1}) \Big)}{(1+r'_1)(1+r'_2)\cdots(1+r'_N)} \\
&= \frac{(-1)\dfrac{\boldsymbol{e}_{k-1}(\boldsymbol{r'}_{-1}) - \boldsymbol{e}_\ell(\boldsymbol{r'}_{-1})}{1+r'_1} + \displaystyle\sum_{m=k}^{\ell} \boldsymbol{e}_{m-1}(\boldsymbol{r'}_{-1})}{(1+r'_2)\cdots(1+r'_N)}
\end{aligned}$$

となる．性質 (8) $\boldsymbol{e}_{k-1}(\boldsymbol{r'}_{-1}) - \boldsymbol{e}_\ell(\boldsymbol{r'}_{-1}) > 0$ と $r'' \in (0, r'_1)$ より，解 $(r'', r'_2, r'_3, \ldots, r'_N)$ の目的関数値は $\boldsymbol{r'}$ の目的関数値より小さい．ゆえに，P1 の許容解 $\boldsymbol{r'}$ が $\boldsymbol{e}_{k-1}(\boldsymbol{r'}) - \boldsymbol{e}_\ell(\boldsymbol{r'}) < 0$ を満たすならば，より小さな目的関数値を持つ解 $\boldsymbol{r''}$ が存在して $\boldsymbol{e}_{k-1}(\boldsymbol{r''}) - \boldsymbol{e}_\ell(\boldsymbol{r''}) = 0$ を満たす．

ベクトル $\boldsymbol{r^*}$ を問題 P1 の許容解で $\boldsymbol{e}_{k-1}(\boldsymbol{r^*}) - \boldsymbol{e}_\ell(\boldsymbol{r^*}) = 0$ を満たすものとする．以下では $\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{r^*})$ の下界または上界について議論する．簡単のために $\alpha \overset{\text{def.}}{=} \left(\frac{S_{k-1}^{\ell}}{S_\ell^{k-1}} \right)^{\frac{1}{\ell-k+1}}$ および $\theta \overset{\text{def.}}{=} \left(\frac{S_\ell}{S_{k-1}} \right)^{\frac{1}{\ell-k+1}}$ と定義する．このとき等式 $\boldsymbol{e}_{k-1}(\boldsymbol{r}^*) - \boldsymbol{e}_\ell(\boldsymbol{r}^*) = 0$ より，

$$\theta = \left(\frac{\binom{N}{k-1} \boldsymbol{e}_\ell(\boldsymbol{r}^*)}{\binom{N}{\ell} \boldsymbol{e}_{k-1}(\boldsymbol{r}^*)} \right)^{\frac{1}{\ell-k+1}} = \left(\frac{\binom{N}{k-1}}{\binom{N}{\ell}} \right)^{\frac{1}{\ell-k+1}}$$

が成り立つ．

(i) 不等式 (3) より，$\forall m \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{r}^*) &= \binom{N}{m} S_m \leq \binom{N}{m} \left(\frac{S_{k-1}^{\ell-m}}{S_\ell^{k-1-m}} \right)^{\frac{1}{\ell-k+1}} \\
&= \binom{N}{m} \left(\frac{S_{k-1}^{\ell}}{S_\ell^{k-1}} \cdot \frac{S_\ell^m}{S_{k-1}^m} \right)^{\frac{1}{\ell-k+1}} \\
&= \binom{N}{m} \alpha\, \theta^m
\end{aligned}$$

が成り立つ．

(ii) 不等式 (4) より，$\forall m \in \{k, k+1, \ldots, \ell\}$,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{r}^*) &= \binom{N}{m} S_m \ge \binom{N}{m} \left(S_{k-1}^{\ell-m} S_\ell^{m-k+1} \right)^{\frac{1}{\ell-k+1}} \\
&= \binom{N}{m} \left(\frac{S_{k-1}^\ell}{S_\ell^{k-1}} \cdot \frac{S_\ell^m}{S_{k-1}^m} \right)^{\frac{1}{\ell-k+1}} \\
&= \binom{N}{m} \alpha\,\theta^m
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

(iii) 不等式 (5) より，$\forall m \in \{\ell+1, \ell+2, \ldots, N\}$,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{r}^*) &= \binom{N}{m} S_m \le \binom{N}{m} \left(\frac{S_\ell^{m-k+1}}{S_{k-1}^{m-\ell}} \right)^{\frac{1}{\ell-k+1}} \\
&= \binom{N}{m} \left(\frac{S_{k-1}^\ell}{S_\ell^{k-1}} \cdot \frac{S_\ell^m}{S_{k-1}^m} \right)^{\frac{1}{\ell-k+1}} \\
&= \binom{N}{m} \alpha\,\theta^m
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

上記を用いると，解 $\boldsymbol{r}^*$ に対応する目的関数値 V_N^* が以下を満たすことが示される．

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{V_N^*} &= \frac{(1+r_1^*)(1+r_2^*)\cdots(1+r_N^*)}{\sum_{m=k}^\ell \boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{r}^*)} = \frac{\sum_{m=0}^N \boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{r}^*)}{\sum_{m=k}^\ell \boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{r}^*)} \\
&= \frac{\sum_{m=0}^{k-1} \boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{r}^*)}{\sum_{m=k}^\ell \boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{r}^*)} + \frac{\sum_{m=k}^\ell \boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{r}^*)}{\sum_{m=k}^\ell \boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{r}^*)} + \frac{\sum_{m=\ell+1}^N \boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{r}^*)}{\sum_{m=k}^\ell \boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{r}^*)} \\
&\le \frac{\sum_{m=0}^{k-1} \binom{N}{m} \alpha\,\theta^m}{\sum_{m=k}^\ell \binom{N}{m} \alpha\,\theta^m} + 1 + \frac{\sum_{m=\ell+1}^N \binom{N}{m} \alpha\,\theta^m}{\sum_{m=k}^\ell \binom{N}{m} \alpha\,\theta^m} \\
&= \frac{\alpha \sum_{m=0}^N \binom{N}{m} \theta^m}{\alpha \sum_{m=k}^\ell \binom{N}{m} \theta^m} = \frac{(1+\theta)^N}{\sum_{m=k}^\ell \binom{N}{m} \theta^m}
\end{aligned}
$$

すなわち $V_N^* \ge \dfrac{\sum_{m=k}^\ell \binom{N}{m} \theta^m}{(1+\theta)^N}$ である．

上記の値が問題 P1 の最適値となっていることは，解 $\widehat{r}_1 = \widehat{r}_2 = \cdots = \widehat{r}_N = \theta$ が P1 の許容解であり，上記の値を達成することで示される（詳細略）． ■

最後に $N \to \infty$ として得られる漸近的な下界を示す．

系 1. 定理 3 の仮定の下では，

$$
\exp\left(- \left(\frac{\ell!}{(k-1)!} \right)^{\frac{1}{\ell-k+1}} \right) \times \sum_{m=k}^{\ell} \left(\frac{1}{m!} \left(\frac{\ell!}{(k-1)!} \right)^{\frac{m}{\ell-k+1}} \right)
$$

は勝利確率の下界となる．

略証. 明らかに，不等式

$$
\begin{aligned}
\frac{\sum_{m=k}^\ell \binom{N}{m} \theta^m}{(1+\theta)^N} &\ge e^{-N\theta} \sum_{m=k}^{\ell} \binom{N}{m} \theta^m \\
&= \exp\left(-\binom{N}{1} \theta \right) \sum_{m=k}^{\ell} \binom{N}{m} \theta^m
\end{aligned}
$$

が成り立つ．これより $\forall m \in \{0, 1, \ldots, N\}$ において，

$$
\begin{aligned}
&\binom{N}{m} \theta^m = \binom{N}{m} \left(\frac{\binom{N}{k-1}}{\binom{N}{\ell}} \right)^{\frac{m}{\ell-k+1}} \\
&= \frac{N!}{(N-m)!m!} \left(\frac{\ell!(N-\ell)!}{(k-1)!(N-k+1)!} \right)^{\frac{m}{\ell-k+1}} \\
&= \frac{1}{m!} \left(\frac{\ell!}{(k-1)!} \right)^{\frac{m}{\ell-k+1}} \frac{\left(1-\frac{0}{N}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{N}\right)}{\left(\left(1-\frac{k-1}{N}\right)\cdots\left(1-\frac{\ell-1}{N}\right)\right)^{\frac{m}{\ell-k+1}}} \\
&\to \frac{1}{m!} \left(\frac{\ell!}{(k-1)!} \right)^{\frac{m}{\ell-k+1}}, \quad \text{as } N \to \infty
\end{aligned}
$$

が成り立つ．上記より

$$
\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{m=k}^\ell \binom{N}{m} \theta^m}{(1+\theta)^N} \\
&\ge \lim_{N\to\infty} \exp\left(-\binom{N}{1} \theta \right) \sum_{m=k}^{\ell} \binom{N}{m} \theta^m \\
&= \exp\left(-\left(\frac{\ell!}{(k-1)!} \right)^{\frac{1}{\ell'}} \right) \sum_{m=k}^{\ell} \left(\frac{1}{m!} \left(\frac{\ell!}{(k-1)!} \right)^{\frac{m}{\ell'}} \right)
\end{aligned}
$$

が得られる，ただし $\ell' = \ell - k + 1$ である． ■

6. おわりに

本稿では，オッズ問題（の変種）について扱った．本稿で扱った問題は Bruss の問題 [1]，Bruss and Paindaveine の問題 [4] さらに Tamaki の問題 [3] を特殊ケースとして含む一般的な問題である．本稿で得られた勝利確率の下界は，それぞれのケースにおける以下の結果に対応している：

(1) e^{-1}（$\ell = k = 1$ の場合）．これは古典的秘書問題の下界と一致している．この結果は [2] において既に得られている．

(2) $\dfrac{\ell^\ell}{(\ell!)e^\ell}$（$\ell = k \ge 1$ の場合）．これは Bruss and Paindaveine の問題 [4] において，成功確率を古典的秘書問題の設定とした際の勝利確率と一致している．

(3) $\exp\left(-(\ell!)^{\frac{1}{\ell}}\right)\sum_{m=1}^{\ell}\frac{(\ell!)^{\frac{m}{\ell}}}{m!}$ ($\ell \geq k=1$ の場合).

これは Tamaki の問題 [3] において，成功確率を古典的秘書問題の設定とした際の勝利確率と一致している．この結果は [6] ですでに得られている．

本稿では紙面の都合で多くの証明を概略のみに留めている．詳細について興味を持っていただけた際は [7] をご覧いただければ幸いである．

参考文献

[1] F. T. Bruss, "Sum the odds to one and stop," *Annals of Probability*, **28**, 1384–1391, 2000.

[2] F. T. Bruss, "A note on bounds for the odds theorem of optimal stopping," *Annals of Probability*, **31**, 1859–1861, 2003.

[3] M. Tamaki, "Sum the multiplicative odds to one and stop," *Journal of Applied Probability*, **47**, 761–777, 2010.

[4] F. T. Bruss and D. Paindaveine, "Selecting a sequence of last successes in independent trials," *Journal of Applied Probability*, **37**, 389–399, 2000.

[5] I. Newton, *Arithmetica universalis: Sive de compositione et resolutione arithmetica liber*, Tooke, 1707.

[6] T. Matsui and K. Ano, "A note on a lower bound for the multiplicative odds theorem of optimal stopping," *Journal of Applied Probability*, **51**, 885–889, 2014.

[7] T. Matsui and K. Ano, "Compare the ratio of symmetric polynomials of odds to one and stop," *Discussion Paper*, 2014-05, Department of Social Engineering, Tokyo Institute of Technology, 2014.

補遺

以下では $\boldsymbol{r}$ の要素がすべて正の場合について，Newton の不等式の証明の概略を記す．最初に特別な場合について示そう．

補題 5. 任意の N 次元正ベクトル $\boldsymbol{r}>\boldsymbol{0}$ において $S_{N-1}(\boldsymbol{r})^2 \geq S_{N-2}(\boldsymbol{r})S_N(\boldsymbol{r})$ が成り立つ．

略証. 簡単な変形により，

$$\begin{aligned}
&S_{N-1}(\boldsymbol{r})^2 - S_{N-2}(\boldsymbol{r})S_N(\boldsymbol{r})\\
&=\left(\frac{\boldsymbol{e}_{N-1}(\boldsymbol{r})}{\binom{N}{N-1}}\right)^2-\frac{\boldsymbol{e}_{N-2}(\boldsymbol{r})}{\binom{N}{N-2}}\frac{\boldsymbol{e}_{N}(\boldsymbol{r})}{\binom{N}{N}}\\
&=\frac{(\boldsymbol{e}_N(\boldsymbol{r}))^2}{N-1}\Big(\frac{N-1}{N^2}\Big(\frac{\boldsymbol{e}_{N-1}(\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{e}_N(\boldsymbol{r})}\Big)^2-\frac{2}{N}\frac{\boldsymbol{e}_{N-2}(\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{e}_N(\boldsymbol{r})}\Big)\\
&=\frac{(\boldsymbol{e}_N(\boldsymbol{r}))^2}{N-1}\left(\frac{N-1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{r_i}\right)^2-\frac{2}{N}\sum_{i<j}\frac{1}{r_ir_j}\right)\\
&=\frac{(\boldsymbol{e}_N(\boldsymbol{r}))^2}{N-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}(\frac{1}{r_i})^2}{N}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}(\frac{1}{r_i})}{N}\right)^2\right)\geq 0
\end{aligned}$$

が得られる．最後の不等式は，$\{1/r_1, 1/r_2, \ldots, 1/r_N\}$ の分散の非負性から導かれる． ■

次に一般の場合について，それが上記のケースに帰着されることを示す．

補題 6. 任意の N 次元ベクトル $\boldsymbol{r}=(r_1,r_2,\ldots,r_N)$ に対し，$(N-1)$ 次元ベクトル $\boldsymbol{s}=(s_1,s_2,\ldots,s_{N-1})$ が存在して，$S_1(\boldsymbol{r})=S_1(\boldsymbol{s})$，$S_2(\boldsymbol{r})=S_2(\boldsymbol{s}),\ldots,$ $S_{N-1}(\boldsymbol{r})=S_{N-1}(\boldsymbol{s})$ が成り立つ．

略証. 変数 x を持つ一変数多項式

$$g(x)=(x+r_1)(x+r_2)\cdots(x+r_N)$$

を導入する．明らかに

$$\begin{aligned}g(x)&=\boldsymbol{e}_0(\boldsymbol{r})x^N+\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{r})x^{N-1}\\&\quad+\cdots+\boldsymbol{e}_{N-1}(\boldsymbol{r})x+\boldsymbol{e}_N(\boldsymbol{r})x^0\end{aligned}$$

が成り立ち，その導関数は

$$\begin{aligned}g'(x)&=N\boldsymbol{e}_0(\boldsymbol{r})x^{N-1}+(N-1)\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{r})x^{N-2}\\&\quad+\cdots+\boldsymbol{e}_{N-1}(\boldsymbol{r})\end{aligned}$$

となる．N 次多項式 $g(x)$ が N 個の実根を持つことより，導関数 $g'(x)$ は重根度を含めて $N-1$ 個の実根を持つので，これを以下では $(-s_1,-s_2,\ldots,-s_{N-1})$ と書く．すると明らかに

$$\begin{aligned}g'(x)&=N(x+s_1)(x+s_2)\cdots(x+s_{N-1})\\&=N\boldsymbol{e}_0(\boldsymbol{s})x^{N-1}+N\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{s})x^{N-2}\\&\quad+\cdots+N\boldsymbol{e}_{N-1}(\boldsymbol{s})\end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに，$g'(x)$ の各項を比べると

$$(N-k)\boldsymbol{e}_k(\boldsymbol{r})=N\boldsymbol{e}_k(\boldsymbol{s}) \quad (0\leq \forall k\leq N-1)$$

が得られる．これを用いると

$$\begin{aligned}S_k(\boldsymbol{r})&=\frac{\boldsymbol{e}_k(\boldsymbol{r})}{\binom{N}{k}}=\frac{N}{N-k}\frac{\boldsymbol{e}_k(\boldsymbol{s})}{\binom{N}{k}}\\&=\frac{\boldsymbol{e}_k(\boldsymbol{s})}{\binom{N-1}{k}}=S_k(\boldsymbol{s})\end{aligned}$$

が成り立つ． ■

最後に Newton の不等式の証明の概要を記す．任意の整数 $1<\forall m<N$ において，$S_m(\boldsymbol{r})^2\geq S_{m-1}(\boldsymbol{r})S_{m+1}(\boldsymbol{r})$ が成り立つことを示すには，補題 6 をベクトル $\boldsymbol{r}$ に繰り返し適用し，ベクトルの次元が $m+1$ 次元になった所で補題 5 を適用すればよい．詳細については紙面の都合上省略する．