競争入札戦略と決定理論モデル

高野　祐一

プロジェクトの請負契約を対象とした競争入札では，入札者はプロジェクトに要する費用を見積もり，適切な入札額を決定することが重要である．本稿では，競争入札のための代表的な決定理論モデルとして，Friedman のモデルと King–Mercer のモデルを紹介する．また，関連研究として，費用見積とプロジェクト遂行に要する人的／時間的資源に着目した競争入札の研究を紹介する．

キーワード：競争入札，入札戦略，決定理論，費用見積，資源配分，動的戦略

1. はじめに

競争入札とは，売買・請負契約などにおいて最も有利な条件を示す者と契約を締結するための方法である．国および地方公共団体の契約は，原則として競争入札によって締結しなければならないことが法律で定められている [1]．以降では，具体的なイメージを抱きやすいように，プロジェクトの請負契約を対象とした競争入札を想定して説明する．

競争入札の詳細については本特集の解説記事 [2] に詳しい説明があるが，基本的な手順は以下のようになる．まず，発注者からの招聘を受けた契約希望者が入札額を提出する．この時点では他者の入札額を知ることはできず，最も低い価格を提出した入札者がプロジェクト契約を落札する．そして，落札者は発注されたプロジェクトを遂行し，その対価として発注者から入札額を受け取る．通常のオークションでは，最も高い価格を掲示する買い手を，商品の売り手が選ぶ．一方で競争入札は逆オークションとも呼ばれ，最も低い価格でプロジェクトを請け負う契約希望者（売り手）を，発注者（買い手）が選ぶ方式である．

競争入札では，入札者はプロジェクトを遂行するために必要な費用を見積もり，その見積額に基づいて入札額を決定する．実際の費用が見積額以下に収まれば，この契約は落札者に利益をもたらす．一方で，実際の費用が見積額を超過すれば，この契約によって落札者は損失を被る可能性がある．競争入札は相対的に入札額の低い者が落札する方式であり，落札者は実際の費用を過小評価している場合が多い．それゆえ落札者は最終的に損失を被る可能性が高く，この問題は「勝者の呪い」と呼ばれる [3]．建設プロジェクトや IT プロジェクトの費用を正確に見積もることは難しく [4, 5]，入札額を決定する際には見積額の不確実性を考慮する必要がある．

競争入札のモデルは，決定理論モデルとゲーム理論モデルの 2 種類に分けることができる [6]．本稿では，入札者の立場から最適な入札戦略（入札額の決定方法）を分析する決定理論モデルを扱う．競争入札のための決定理論モデルの研究は 1956 年に Friedman [7] によって開始され，これまでに多くの研究がなされている [6, 8〜10]．なお，競争入札戦略に関する Friedman の博士論文は，米国で初めてオペレーションズ・リサーチの学位が与えられた博士論文であるとされており [11]，競争入札とオペレーションズ・リサーチの間には古くからの深いつながりがあることがわかる．

本稿では，競争入札のための代表的な決定理論モデルを紹介することで，競争入札の分野でオペレーションズ・リサーチの手法が有効に活用されていることを伝えたい．さらに，最新の関連研究についても紹介し，この分野の研究動向の一端も伝えることができればと考える．

本稿は以下のように構成される．2 節で Friedman [7] のモデルを紹介し，その問題点を指摘する．3 節では，Friedman モデルの問題点を解決するモデルとして，King–Mercer [12] のモデルを紹介する．4 節では関連研究を紹介し，5 節で結論を述べる．

2. Friedman のモデル

1956 年に出版された Friedman の論文 [7] は，競争入札戦略に関する先駆的研究である．この論文では，本質的な内容が明解かつ簡潔にまとめられており，著者は強い感銘を受けた．本節では，Friedman モデルの期待利益と落札確率について解説し，それらの問題点

たかの　ゆういち
専修大学ネットワーク情報学部
〒 214–8580 神奈川県川崎市多摩区東三田 2–1–1

を指摘する．

2.1 Friedman モデルの期待利益

プロジェクトの実際費用は入札時点では不確実であるため，確率変数 $\tilde{C}$ とする．このプロジェクト契約に対する入札額を決定変数 b とし，落札確率を $\mathcal{P}(b)$ とする．このとき，この契約を落札した際の利益は $b-\tilde{C}$ と表される．これに落札確率 $\mathcal{P}(b)$ を乗じ，確率変数 $\tilde{C}$ に関する期待値をとることで，入札者の期待利益を求める．落札確率 $\mathcal{P}(b)$ は実際費用 $\tilde{C}$ とは独立であることに注意すると，入札者の期待利益 $\mathcal{R}(b)$ は以下のように表すことができる：

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(b) &= \mathbb{E}[\mathcal{P}(b)\,(b-\tilde{C})]\\ &= \mathcal{P}(b)\,(b-\bar{C}),\end{aligned} \tag{1}$$

ただし，$\bar{C}=\mathbb{E}[\tilde{C}]$ は実際費用の期待値とする．

入札額 b を高くすれば，落札後の利益 $(b-\bar{C})$ は大きくなるが，落札できる確率 $\mathcal{P}(b)$ は低くなる．Friedman [7] は期待利益 (1) が最大となるように入札額を決定することを提案している．

2.2 Friedman モデルの落札確率

ここでは，Friedman モデルの落札確率 $\mathcal{P}(b)$ について詳しく説明する．

競合者の入札額は，すべて同一のガンマ分布に従うことを仮定する．具体的には，ガンマ分布の形状パラメータを $\kappa\ (\geq 1)$，尺度パラメータを $\theta\ (>0)$ とし，競合者の入札額 y は以下の確率密度関数をもつこととする：

$$\mathcal{F}(y) = y^{\kappa-1}\frac{\exp(-y/\theta)}{(\kappa-1)!\,\theta^{\kappa}} \quad (y \geq 0).$$

上記のガンマ分布の平均と分散は，それぞれ $\kappa\theta$，$\kappa\theta^2$ となる．

また，競合者の数はポワソン分布に従うこととする．すなわち，$\lambda\ (>0)$ をポワソン分布の平均と分散を表すパラメータとし，競合者数 k は以下の確率質量関数をもつこととする：

$$\mathcal{G}(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda) \quad (k=0,1,2,\ldots).$$

入札額 b の入札者は，競合者の入札額がすべて b を上回った場合に落札できる．したがって，入札者の落札確率は以下のように表せる：

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}(b)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{G}(k)\left(\int_b^{\infty}\mathcal{F}(y)\,\mathrm{d}y\right)^k\\ &= \exp(-\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\lambda\int_b^{\infty}y^{\kappa-1}\frac{\exp(-y/\theta)}{(\kappa-1)!\,\theta^{\kappa}}\,\mathrm{d}y\right)^k.\end{aligned}$$

上記の落札確率には積分が含まれているが，以下の変形によって積分は消去できる．まず，指数関数のマクローリン展開 $\exp(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^k/k!$ を用いて，

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}(b)\\ &= \exp(-\lambda)\exp\left(\lambda\underline{\int_b^{\infty}y^{\kappa-1}\frac{\exp(-y/\theta)}{(\kappa-1)!\,\theta^{\kappa}}\,\mathrm{d}y}\right)\end{aligned} \tag{2}$$

と変形する．次に，式 (2) の下線部に部分積分を用いて，

$$\begin{aligned}&\int_b^{\infty}y^{\kappa-1}\frac{\exp(-y/\theta)}{(\kappa-1)!\,\theta^{\kappa}}\,\mathrm{d}y\\ =&\frac{1}{(\kappa-1)!\,\theta^{\kappa}}\int_b^{\infty}y^{\kappa-1}\exp\left(-\frac{y}{\theta}\right)\,\mathrm{d}y\\ =&\frac{1}{(\kappa-1)!\,\theta^{\kappa}}\int_b^{\infty}y^{\kappa-1}\left(-\theta\exp\left(-\frac{y}{\theta}\right)\right)'\,\mathrm{d}y\\ =&\frac{1}{(\kappa-1)!\,\theta^{\kappa}}\left[y^{\kappa-1}\left(-\theta\exp\left(-\frac{y}{\theta}\right)\right)\right]_b^{\infty}\\ &\quad-\frac{1}{(\kappa-1)!\,\theta^{\kappa}}\int_b^{\infty}(y^{\kappa-1})'\left(-\theta\exp\left(-\frac{y}{\theta}\right)\right)\,\mathrm{d}y\\ =&\exp\left(-\frac{b}{\theta}\right)\frac{1}{(\kappa-1)!}\left(\frac{b}{\theta}\right)^{\kappa-1}\\ &\quad+\underline{\frac{1}{(\kappa-2)!\,\theta^{\kappa-1}}\int_b^{\infty}y^{\kappa-2}\exp\left(-\frac{y}{\theta}\right)\,\mathrm{d}y}\end{aligned} \tag{3}$$

と変形する．式 (3) の下線部に同様の変形を繰り返すと，最終的に

$$\begin{aligned}&\int_b^{\infty}y^{\kappa-1}\frac{\exp(-y/\theta)}{(\kappa-1)!\,\theta^{\kappa}}\,\mathrm{d}y\\ &\quad=\exp\left(-\frac{b}{\theta}\right)\sum_{\ell=0}^{\kappa-1}\frac{1}{\ell!}\left(\frac{b}{\theta}\right)^{\ell}\end{aligned} \tag{4}$$

となる．式 (4) を式 (2) に代入することで，落札確率は

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}(b)\\ &= \exp\left(-\lambda\left(1-\exp\left(-\frac{b}{\theta}\right)\sum_{\ell=0}^{\kappa-1}\frac{1}{\ell!}\left(\frac{b}{\theta}\right)^{\ell}\right)\right)\end{aligned} \tag{5}$$

となる．

2.3 Friedman モデルの問題点

Friedman のモデル (1)，(5) には以下の二つの問題点がある．

第一の問題点は，見積額の不確実性が入札額に与える影響を考慮していないことである．入札者は費用の見積額に基づいて入札額を決定するために，見積額が

実際費用よりも高ければ，入札額も競合者より高くなると考えられる．逆に見積額が実際費用よりも低ければ，入札額も競合者より低くなる可能性が高い．しかし，Friedman モデルでは見積額に依存せずに入札額を決定でき，上述のような見積額と入札額の関係が考慮されていない．

Friedman モデルの第二の問題点は，問題が非有界であり，最適解が存在しないことである．競合者数はポワソン分布に従うことを仮定しているために，一定の確率で競合者数が 0 となり，その場合は入札額にかかわらず確実に落札できる：

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(b) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{G}(k) \left(\int_b^{\infty} \mathcal{F}(y)\,\mathrm{d}y \right)^k \\ &\geq \mathcal{G}(0) = \exp(-\lambda) > 0.\end{aligned}$$

それゆえ，入札額を高くして競合者がいない場合に荒稼ぎすることで，期待利益も際限なく増加する：

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(b) &= \mathcal{P}(b)\,(b - \bar{C}) \\ &\geq \mathcal{G}(0)\,(b - \bar{C}) \to \infty \quad (b \to \infty).\end{aligned}$$

発注者が設定する予定価格を超えた入札額は無効となる場合もあるが [1]，いずれにせよ式 (1) の無制約最大化問題は非有界である．

3. King–Mercer のモデル

Friedman [7] のモデルの二つの問題点を解決できるモデルとして，本節では King–Mercer [12] のモデルを紹介する．このモデルでは Naert–Weverbergh [13] と同様に見積額を確率変数とし，見積額に利幅を乗せて入札額を決定する．なお，King–Mercer の論文 [9,12] では，競争入札のモデルに関するさまざまな知見や示唆が与えられており，この分野に興味をもたれた読者には一読を勧めたい．

3.1 King–Mercer モデルの期待利益

Friedman モデルでは，実際費用を確率変数 $\tilde{C}$ としており，これは入札時点の状況と整合的である．一方で King–Mercer モデルでは，実際費用を定数 C，見積誤差を確率変数 e とし，見積額を $(1+e)\,C$ とする．そして利幅 m を決定変数とし，見積額に利幅を乗せて入札額を

$$\mathcal{B}(m,e) = (1+m)\,(1+e)\,C$$

とする．このように入札額を設定することで，見積額の不確実性が入札額に与える影響を加味することができる．

Friedman モデルと同様に，入札額が b の場合の落札確率を $\mathcal{P}(b)$ とする．見積誤差 e の確率密度関数を $\phi(e)$ として，King–Mercer モデルの期待利益 $\mathcal{R}(m)$ は以下のように表せる：

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}(m) \\ &= \int \mathcal{P}(\mathcal{B}(m,e))\,(\mathcal{B}(m,e) - C)\,\phi(e)\,\mathrm{d}e.\end{aligned} \tag{6}$$

非現実的ではあるが，ここでは見積誤差が存在しないこと $(e=0)$ を仮定してみる．このとき，入札額は $\mathcal{B}(m,e) = (1+m)\,C$ となり，期待利益は

$$\mathcal{R}(m) = \mathcal{P}((1+m)\,C)\,m\,C \tag{7}$$

となる．ここで，$b = (1+m)\,C$，$\bar{C} = C$ とすれば，Friedman モデルの期待利益 (1) は式 (7) と等価であることがわかる．この意味で，King–Mercer モデルは Friedman モデルの一般化とみなすことができる．

3.2 King–Mercer モデルの落札確率

競合者 $k = 1, 2, \ldots, n$ の入札利幅を定数 m_k，見積誤差を確率変数 e_k とする．また，見積誤差 e_k の確率密度関数を $\phi_k(e_k)$ とする．このとき，すべての競合者 $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して，

$$\mathcal{B}(m,e) \leq \mathcal{B}(m_k, e_k)$$

が成り立つ場合に，入札者がプロジェクト契約を落札する．

ここで，

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}(m,e) \leq \mathcal{B}(m_k,e_k) \\ \Longleftrightarrow\ &(1+m)\,(1+e)\,C \leq (1+m_k)\,(1+e_k)\,C \\ \Longleftrightarrow\ &\underbrace{\frac{(1+m)\,(1+e)}{1+m_k} - 1}_{M(m,m_k,e)} \leq e_k\end{aligned}$$

を考慮すると，競合者数が n の場合の落札確率は

$$\mathcal{P}(\mathcal{B}(m,e)) = \prod_{k=1}^{n} \int_{M(m,m_k,e)}^{\infty} \phi_k(e_k)\,\mathrm{d}e_k \tag{8}$$

となる．見積誤差 e_k が一様分布に従うことを仮定すると，式 (8) の積分を消去でき，ある条件の下では King–Mercer モデル (6)，(8) の解析解を導出できる [12]．

4. 関連研究

競争入札を通してプロジェクトを請け負う業者は，「入札するプロジェクトの費用の見積」と「落札したプ

ロジェクトの遂行」の両方の作業に対して，人的／時間的資源を投入する必要がある．本節では，これらの資源に着目した競争入札の研究を紹介する．

4.1 費用見積作業に対する資源配分

Towler–Sinnott [14] は，見積作業に投入する資源量と見積精度との間には正の相関があることを指摘している．また，Christensen–Dysert [15] は，見積の階級ごとに必要な費用と見積精度を示した費用見積分類行列[1]を作成している．これらの研究から，見積作業に多くの資源を投入すれば，見積精度を高められることがわかる．しかしながら，見積作業には相応の費用がかかるうえに，通常は見積作業に投入できる資源量にも限度がある．したがって，複数のプロジェクトの費用見積作業に適切に資源を配分することは非常に重要であるが，一方で，このような資源配分問題の既存研究はほとんど存在しない．それゆえ著者らの研究グループでは，費用見積作業に対する資源配分に着目した研究を行ってきた．

Ishii–Takano–Muraki [16] は，期待利益に基づいて各プロジェクト契約の優先度を定義し，費用見積の資源を配分する簡易的なアルゴリズムを提案している．さらに，損失を被る確率を一定値以下とする制約条件の下で，期待利益が最大となるように最適化モデルを利用して入札額を決定している．

Ishii–Takano–Muraki [17] は，費用見積とプロジェクト遂行に投入する資源量のバランスを考慮した受注選択戦略を提案し，シミュレーション実験を通して提案戦略の有効性を検証している[2]．

Takano–Ishii–Muraki [19] は，多期間の費用見積作業に対する資源配分問題を扱っている．期待利益を表す関数に対して区分線形近似を施すことで，資源配分問題を混合整数線形最適化モデルとして定式化し，計算実験を通して提案モデルの有効性を検証している．

4.2 動的な競争入札戦略

競争入札の戦略と結果は，その後の入札戦略に影響を与えることが多い．たとえば，利幅を低くして多数のプロジェクト契約を落札すれば，それらのプロジェクトを遂行するために多くの資源が必要となり，新しいプロジェクト契約を請け負うことが難しくなる．したがって，長期的な計画を立てる際には，競争入札の結果に応じて入札戦略を変更していくことを考慮する必要がある．

このような動的な競争入札戦略の研究は過去にも行われているが [20〜25]，これらの研究では Friedman [7] に基づくモデルが採用されており，見積額の不確実性が入札額に与える影響を考慮していない．そこで，Takano–Ishii–Muraki [26] では，Knode–Swanson [21] と King–Mercer [12] を組み合わせた確率動的最適化モデルを提案している．計算実験の結果，Friedman モデルに基づく動的戦略と比較して，提案モデルは利幅を少し高くして入札する傾向があり，期待利益の増加と利益変動リスクの低減を同時に実現できることを示した．

5. おわりに

本稿では，競争入札のための代表的な決定理論モデルとして，Friedman [7] のモデルと King–Mercer [12] のモデルを紹介した．また，関連する研究として，費用見積とプロジェクト遂行に要する人的／時間的資源に着目した競争入札の研究を紹介した．

本稿で説明したような決定理論モデルは，石油会社などで実際に活用されている [27]．また，King–Mercer [9] によれば，Friedman [7] に代表される決定理論モデルは，土木建築のような見積誤差の影響が他の要因よりも圧倒的に大きい市場で特に有効であり，一方で台所用品のような個々の商品特性が強い市場では有効ではないとされている．

本稿では競争入札のためのゲーム理論モデルを紹介することはできなかったが，代表的な論文としては Rothkopf [28] などがある．また，落札確率 $\mathcal{P}(b)$ の定義に関しては本稿で紹介した方法以外にも，対数正規分布に基づいて $\mathcal{P}(b)$ を直接推定する方法 [29] や，度数分布によって定義する方法 [30] がある．これらの詳細や他の話題については，サーベイ論文 [6, 8〜10] を参照してほしい．

本稿でも述べたように，競争入札とオペレーションズ・リサーチは非常に関わりが深い．読者にとって，本稿が競争入札の研究に関心をもつきっかけとなれば幸いである．

謝辞　東京工業大学の村木正昭名誉教授には，競争入札の研究に取り組むきっかけを与えていただきました．文教大学の石井信明先生には，本稿を執筆する機会を与えていただきました．成蹊大学の田中研太郎先生には，2.2 節の式変形に関して助言をいただきました．この場を借りて御礼申し上げます．

[1] 改変した表が本特集の解説記事 [2] に掲載されている．
[2] 本特集の解説記事 [18] では，論文 [17] の実験結果が紹介されている．

参考文献

[1] 黒田早苗，“公共工事における入札・契約制度，”オペレーションズ・リサーチ，**60**, pp. 386–391, 2015.

[2] 佐藤知一，“プロジェクト入札価格の決定問題—競争入札における見積リスクと最適入札価格について—，”オペレーションズ・リサーチ，**60**, pp. 374–379, 2015.

[3] E. C. Capen, R. V. Clapp and W. M. Campbell, “Competitive bidding in high-risk situations,” *Journal of Petroleum Technology*, **23**, pp. 641–653, 1971.

[4] 藤岡徹夫，“建設における CM 方式，”オペレーションズ・リサーチ，**60**, pp. 392–397, 2015.

[5] 初田賢司，“ソフトウェア開発プロジェクトの見積もり，”オペレーションズ・リサーチ，**60**, pp. 398–403, 2015.

[6] M. H. Rothkopf and R. M. Harstad, “Modeling competitive bidding: A critical essay,” *Management Science*, **40**, pp. 364–384, 1994.

[7] L. Friedman, “A competitive-bidding strategy,” *Operations Research*, **4**, pp. 104–112, 1956.

[8] R. Engelbrecht-Wiggans, “Auctions and bidding models: A survey,” *Management Science*, **26**, pp. 119–142, 1980.

[9] M. King and A. Mercer, “Recurrent competitive bidding,” *European Journal of Operational Research*, **33**, pp. 2–16, 1988.

[10] R. M. Stark and M. H. Rothkopf, “Competitive bidding: A comprehensive bibliography,” *Operations Research*, **27**, pp. 364–390, 1979.

[11] M. Skitmore, “Fundamental research in bidding and estimating,” In *Proceedings of British/Israeli Seminar on Building Economics; The International Council for Building Research Studies and Documentation*, pp. 130–155, 1988.

[12] M. King and A. Mercer, “The optimum markup when bidding with uncertain costs,” *European Journal of Operational Research*, **47**, pp. 348–363, 1990.

[13] P. A. Naert and M. Weverbergh, “Cost uncertainty in competitive bidding models,” *Journal of the Operational Research Society*, **29**, pp. 361–372, 1978.

[14] G. Towler and R. K. Sinnott, *Chemical Engineering Design*, 2nd ed., Butterworth-Heinemann, 2012.

[15] P. Christensen and L. R. Dysert, “Cost estimate classification system,” *AACE International Recommended Practice*, No.17R-97, 1997.

[16] N. Ishii, Y. Takano and M. Muraki, “A heuristic bidding price decision algorithm based on cost estimation accuracy under limited engineering man-hours in EPC projects,” *Simulation and Modeling Methodologies, Technologies and Applications* (*Advances in Intelligent Systems and Computing Series*), vol. 319, M. S. Obaidat, S. Koziel, J. Kacprzyk, L. Leifsson and T. Oren (eds.), Springer, pp. 101–118, 2015.

[17] N. Ishii, Y. Takano and M. Muraki, “An order acceptance strategy under limited engineering man-hours for cost estimation in engineering-procurement-construction projects,” *International Journal of Project Management*, **32**, pp. 519–528, 2014.

[18] 石井信明，“供給能力と受注量の最適化問題，”オペレーションズ・リサーチ，**60**, pp. 380–385, 2015.

[19] Y. Takano, N. Ishii and M. Muraki, “Multi-period resource allocation for estimating project costs in competitive bidding,” Technical Report, Department of Industrial Engineering and Management, Tokyo Institute of Technology, No. 2014-6, 2014.

[20] E. Attanasi, “Some interpretations of sequential bid pricing strategies,” *Management Science*, **20**, pp. 1424–1427, 1974.

[21] C. S. Knode and L. A. Swanson, “A stochastic model for bidding,” *Journal of the Operational Research Society*, **29**, pp. 951–957, 1978.

[22] K. O. Kortanek, J. V. Soden and D. Sodaro, “Profit analyses and sequential bid pricing models,” *Management Science*, **20**, pp. 396–417, 1973.

[23] H. Li and K. Womer, “Project scheduling in decision-theoretic competitive bidding,” *2006 IEEE Congress on Evolutionary Computation*, pp. 3042–3049, 2006.

[24] S. S. Oren and M. H. Rothkopf, “Optimal bidding in sequential auctions,” *Operations Research*, **23**, pp. 1080–1090, 1975.

[25] R. M. Stark and R. H. Mayer Jr., “Some multi-contract decision-theoretic competitive bidding models,” *Operations Research*, **19**, pp. 469–483, 1971.

[26] Y. Takano, N. Ishii and M. Muraki, “A sequential competitive bidding strategy considering inaccurate cost estimates,” *OMEGA: The International Journal of Management Science*, **42**, pp. 132–140, 2014.

[27] D. L. Keefer, F. B. Smith Jr. and H. B. Back, “Development and use of a modeling system to aid a major oil company in allocating bidding capital,” *Operations Research*, **39**, pp. 28–41, 1991.

[28] M. H. Rothkopf, “A model of rational competitive bidding,” *Management Science*, **15**, pp. 362–373, 1969.

[29] F. Hanssmann and B. H. P. Rivett, “Competitive bidding,” *Operational Research Quarterly*, **10**, pp. 49–55, 1959.

[30] T. L. Morin and R. H. Clough, “OPBID: Competitive bidding strategy model,” *ASCE Journal of the Construction Division*, **95**, pp. 85–106, 1969.