オンライン型商品発送問題に対する列生成アプローチ

伊東　真由

名古屋大学情報文化学部自然情報学科 数理情報系（現所属：名古屋市）
指導教員：柳浦 睦憲 教授・胡 艶楠 助教

1. はじめに

本研究は，複数種類の商品を，複数種類のコストの異なる箱を用いて１つの発送元から１つの発送先に多期間に渡って輸送する際にかかるコストの最小化を目的とする．発送元は発送期限日と需要量が決まった商品の発注を毎日のように受ける．ある期間のすべての情報が最初から与えられた上で最適化を行う問題をオフライン問題とよび，翌日以降の発注に関する情報が把握できない状況の下で１日ごとに計画を定める問題をオンライン問題とよぶ．本研究ではオフラインの商品発送問題に列生成アプローチが適用できることを示し，次に，この手法をオンラインの商品発送問題に応用する方法を提案する．

2. 問題

日の集合を $T = \{1, 2, \ldots, t_{\max}\}$，商品の集合を $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ とし，各商品 i には受注日 t_i^{r} $(\in T)$ と発送期限日 t_i^{d} $(\in T)$，需要量 d_i が与えられる．箱の種類の集合を $K = \{1, 2, \ldots, k_{\max}\}$ と定義し，箱の種類 k $(\in K)$ ごとに，1 箱当たりの発送コスト c_k と容量 b_k が与えられる．また，各商品 i を箱種類 k の箱に詰める場合にかかる資源量 w_{ki} が与えられ，箱に詰める商品の資源量の合計が容量 b_k 以下であるとき，それらの商品を箱に詰めることができるものとする．1 つの箱に詰める商品の組合せの各々を箱詰めパターンと呼び，すべてのパターンの集合を N_{all} とする．各パターン j $(\in N_{\mathrm{all}})$ において切り出す商品 i の数を a_{ij}，箱種類を k_j とすると，各パターン j は $\sum_{i \in M} w_{k_j i} a_{ij} \le b_{k_j}$ を満たす．これに加え，パターン j に対する発送日 t_j は $a_{ij} > 0 \Longrightarrow t_j \in \left\{t_i^{\mathrm{r}}, t_i^{\mathrm{r}}+1, \ldots, t_i^{\mathrm{d}}\right\}$, $\forall i \in M$ を満たさなければならない．ここで，各日 t に対して（日 t に未発送で残っていれば）その日に発送可能な商品 (target item) の集合を M_{tgt}^t と定義する．また，その日に発送しなければならない商品 (urgent item) の集合を M_{ugt}^t と定義する．この記法を用いると，t_j に対する上述の条件は $a_{ij} > 0 \Longrightarrow i \in M_{\mathrm{tgt}}^{t_j}$, $\forall i \in M$ と書ける．これらを用いて，オフライン型商品発送問題を

$$
\begin{array}{llll}
\mathrm{PSP_{off}}(N_{\mathrm{all}}) & \min & \displaystyle\sum_{j \in N_{\mathrm{all}}} c_{k_j} x_j & \\
 & \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j \in N_{\mathrm{all}}} a_{ij} x_j \ge d_i, & \forall i \in M \\
 & & x_j \in \mathbb{Z}_{\ge 0}, & \forall j \in N_{\mathrm{all}}
\end{array}
$$

と定式化できる（$\mathbb{Z}_{\ge 0}$ は非負整数集合）．オフライン問題では問題を解く時点で T のすべての日に対する受注情報が既知である．

オンライン問題では，各日 t $(\in T)$ において，前日までに行った決定を変えることはできず，また，次の日以降のことはわからないという状況の下で，その日に発送可能な商品のうちどれを発送するかと，それらをどの箱に詰めるかを定めることが求められる．

3. オフライン問題に対する列生成アプローチ

本節では，オフライン型の商品発送問題に対する列生成アプローチを説明する．まず，$\mathrm{PSP_{off}}(N_{\mathrm{all}})$ を線形緩和した線形計画問題 $\mathrm{PSP_{off}^*}(N_{\mathrm{all}})$ を考える．N_{all} に含まれるパターン数は，商品数に対して指数的に大きくなりうるため，現実的な時間で最適解を得ることは難しい．そこで，部分集合 $N \subseteq N_{\mathrm{all}}$ からなる限定主問題 $\mathrm{PSP_{off}^*}(N)$ を考える．列生成法は，ある N から始め，$\mathrm{PSP_{off}^*}(N)$ の最適値を改善するように逐次的に N に列を追加しながら $\mathrm{PSP_{off}^*}(N)$ を解く操作を反復する方法である [1]．各反復では，$\mathrm{PSP_{off}^*}(N)$ の双対問題の最適解 y^* を求め，$\mathrm{PSP_{off}^*}(N)$ の目的関数値を改善するための必要条件 $\sum_{i \in M} a_{il} y_i^* > c_{k_l}$ を満たす列 $l \in N_{\mathrm{all}} \setminus N$ を生成し，N に追加する．これをそのような条件を満たす列が生成できなくなるまで繰り返す．最後に得られた $\mathrm{PSP_{off}^*}(N)$ の解は $\mathrm{PSP_{off}^*}(N_{\mathrm{all}})$ の最適解である．

上述の必要条件をみたす列 を見つける問題を価格付け問題と呼ぶ．$\mathrm{PSP_{off}^*}(N)$ に対する価格付け問題は，以下のナップサック問題となる:

$$
\begin{array}{llll}
\mathrm{KP_{off}}(t, k) & \max & \displaystyle\sum_{i \in M_{\mathrm{tgt}}^t} y_i^* a_{il} & \\
 & \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i \in M_{\mathrm{tgt}}^t} w_{ki} a_{il} \le b_k & \\
 & & a_{il} \in \{0, 1, \ldots, d_i\}, & \forall i \in M_{\mathrm{tgt}}^t
\end{array}
$$

以上の列生成法を用いて得られた解 x^* は $\mathrm{PSP}^*_{\mathrm{off}}(N_{\mathrm{all}})$ の最適解であるが，整数解とはかぎらないため，列生成終了後に，生成された列集合 N を用いて整数計画問題 $\mathrm{PSP}_{\mathrm{off}}(N)$ を解くことにより整数解を得る．

4. オンライン問題に対する提案手法

4.1 列の評価基準

本研究では，オンライン問題を解く際，（元のコストとは限らない）あるコスト係数 $\tilde{c}_j$ を各列 j の評価基準とした部分問題を解くことで列生成を行う手法を提案する．各日 t に対して $\forall j \in N_{\mathrm{all}}$ の中で発送日 $t_j = t$ の条件を満たす列すべての集合を N^t_{all} とする．オンライン問題では翌日以降のことは分からないので，1 日ごとに urgent item のうち未発送のものをすべて発送することを条件として問題を解く必要がある．そのような商品発送問題を $\mathrm{PSP}_{\mathrm{on}}(N^t_{\mathrm{all}})$ と記し，この問題における列のコストを $\tilde{c}_j$ とする．また，$t-1$ 日目までに発送済みの量を差し引いた各商品 i の残余需要量を $\tilde{d}_i$，そのような需要が 0 であるものをもとの M^t_{tgt} および M^t_{ugt} から取り除いた集合をそれぞれ $\tilde{M}^t_{\mathrm{tgt}}$ および $\tilde{M}^t_{\mathrm{ugt}}$ とする．提案手法の基本方針は，各日 t に対して $\mathrm{PSP}_{\mathrm{on}}(N^t_{\mathrm{all}})$ の線形緩和問題 $\mathrm{PSP}^*_{\mathrm{on}}(N^t_{\mathrm{all}})$ に列生成法を適用して $N^t \subseteq N^t_{\mathrm{all}}$ を得たのち $\mathrm{PSP}_{\mathrm{on}}(N^t)$ を解いて整数解を得るというものである．

$\tilde{c}_j$ として提案した 6 つの基準のうちとくに良い結果が得られた後悔＋残余コスト最小化基準を以下に示す．商品 i を箱種 k の箱に入れて発送するときにその箱が満杯に詰まっていれば，$c_k w_{ki}/b_k$ は，商品 i ひとつ当たりの発送コストとみなせる．すべての箱種の中のこの値の最小値を $\gamma_i = \min_k c_k w_{ki}/b_k$ と定義し，この値からの乖離 $\Delta_{ki} = c_k w_{ki}/b_k - \gamma_i$ を後悔と定義する．これに残余コスト $\left(1-\sum_{i\in\tilde{M}^t_{\mathrm{tgt}}} a_{ij} w_{k_j i}/b_{k_j}\right)c_{k_j} + \epsilon$（$\epsilon$ は小さな正定数），すなわち空き容量を発送コストに換算した値を加えたもの $\tilde{c}_j = \sum_{i\in\tilde{M}^t_{\mathrm{tgt}}} a_{ij}\Delta_{k_j i} + \left(1-\sum_{i\in\tilde{M}^t_{\mathrm{tgt}}} a_{ij} w_{k_j i}/b_{k_j}\right)c_{k_j} + \epsilon = c_{k_j} - \sum_{i\in\tilde{M}^t_{\mathrm{tgt}}} a_{ij}\gamma_i + \epsilon$ の最小化を基準とする方法である．

この基準を含め，6 つのうち 4 つの基準では価格付け問題はナップサック問題となる．一方，残りの 2 つでは価格付け問題が二次計画問題になるため動的計画法を提案した．

4.2 需要を超過する発送の削減

上述の手法により得られる解 x^* は，需要量のカバー制約のみを考慮しているため需要量より多くの商品を箱に詰める列の組合せを生成してしまうことがある．x^* から超過分を削除すれば（超過削除操作と呼ぶ），需要丁度の発送計画を得ることはできるが，削除した部分の空き容量が無駄になる．この点を改善するため，本研究では以下のような様々なアイデアを提案し，検証した．その 1 つは x^* の列の一部を需要を超過しないように選んだのち，残り需要に対して 4.1 節の手法を再度行う操作を反復する補正操作反復法である．

また，$\mathrm{PSP}_{\mathrm{on}}(N^t)$ に需要量を超えないことを要求する制約式を追加した上界制約付き商品発送問題 $\mathrm{UPSP}_{\mathrm{on}}(N^t)$ およびその線形緩和問題 $\mathrm{UPSP}^*_{\mathrm{on}}(N^t)$ を $\mathrm{PSP}_{\mathrm{on}}(N^t)$ と $\mathrm{PSP}^*_{\mathrm{on}}(N^t)$ の代わりに用いて前節の手法を適用することで解を得る手法も試みた．

さらに，$\mathrm{UPSP}_{\mathrm{on}}(N^t)$ に対する良い整数解が得られやすくなるように，$\mathrm{UPSP}^*_{\mathrm{on}}(N^t)$ に対する列生成の際に必要条件を満たさない列であってもその一部をうまく選んで列集合に追加する手法（整数解強化列生成）を提案し，検証した．

5. 計算結果とまとめ

本研究では，複数種類の商品を多期間に渡って輸送する際にかかるコストの最小化を目的とする商品発送問題を考えた．計算実験により，4.1 節の 6 つの基準の各々に対し 4.2 節の手法の組合せの異なる 13 通りのアルゴリズムを検証した．これら 78 通りの組合せの各々に対し，最適値の下界からの gap を 36 個の問題例に対して比較した結果，空き容量を最小化したり残余コストを最小化したりする方が単に総コストを最小化する場合よりも良い結果を得ることを確認した．また，$\mathrm{UPSP}_{\mathrm{on}}(N^t)$ と整数解強化列生成を組み合わせた方法により，$\mathrm{PSP}_{\mathrm{on}}(N^t)$ と超過削除操作を組み合わせた最も単純なアルゴリズムに比べて性能が大きく向上することが分かった．コストのうち日々の発送スケジュールの決め方によって本質的に左右される部分に着目した評価基準である後悔＋残余コスト最小化基準に基づく提案手法により，最も良い結果が得られている．この手法によって得られた解を，オフライン問題から得られる下界と比較すると，誤差は平均 3.33% であり，提案手法の有効性が確認できた．

参考文献

[1] G. Desaulniers, J. Desrosiers and M. M. Solomon, (eds.), *Column Generation*, Springer, 2005