

A central limit theorem for Markov modulated $M^x/M/\infty$ queues with binomial catastrophes

(Binomial catastrophe の発生を伴うマルコフ変調 $M^x/M/\infty$ 待ち行列に対する 中心極限定理)

矢島 萌子

東京工業大学大学院情報理工学研究科数理・計算科学専攻 (現:東京工業大学情報理工学院数理・計算科学系)
指導教員: 三好直人 東京工業大学教授

1. はじめに

待ち行列を用いてシステムをモデル化する際、何かしらトラブルが発生して客が失われる状況を表現したいことがある。客がサービス完了を待たずに系から離脱する catastrophe 現象の発生を伴う待ち行列モデルは、このような状況を適切に表現できる。本研究では、catastrophe 現象の一種である binomial catastrophe の発生を伴うマルコフ変調無限サーバ待ち行列の定常系内客数分布を解析する。

マルコフ変調待ち行列は、系の背後に存在する連続時間マルコフ連鎖の状態により決定するパラメータを持つため、忠実にシステムをモデル化できる。しかし、マルコフ変調待ち行列は非常に単純なモデルを除き、定常系内客数分布やそのモーメントを陽に得ることは難しい。

そこで本研究では、到着率が大きい場合に着目し定常系内客数分布を解析した。そして、あるスケーリング則の下で定常系内客数分布の中心極限定理が成立することを示した。中心極限定理から到着率が大きい場合に有用な定常系内客数分布の正規近似が得られる。

Blom ら [1] は集団到着と catastrophe 現象の発生がない点以外は本研究が解析したモデルと同等のモデルで定常系内客数分布の中心極限定理が成立することを示している。つまり、本研究は [1] の拡張である。

2. 待ち行列モデル

本研究が考える待ち行列モデルは無数個のサーバを有し、有限状態空間 \mathbb{D} を持つ既約な連続時間マルコフ連鎖 $\{J(t)\}$ に支配される。 $\{J(t)\}$ を背後過程と呼ぶ。 $\{J(t)\}$ の無限小生成行列を $\mathbf{Q} = (q_{i,j})_{i,j \in \mathbb{D}}$ 、定常分布を $\boldsymbol{\tau} = (\tau_i)_{i \in \mathbb{D}}$ と記す。背後過程の状態が $i \in \mathbb{D}$ のとき、客の集団が率 λ_i のポアソン過程に従って系に到着し、集団に属する客数は確率変数 X_i に従う。解析の都合上、 $E[X_i^3]$ は有限であると仮定する。

客は到着後すぐに空サーバを一つ占有してサービスを受け始め、サービス完了後すぐに系から離脱する。客のサービス要求量は互いに独立に平均 1 の指数分布に従う。背後過程の状態が $i \in \mathbb{D}$ のとき、一つのサーバの単位時間あたりのサービス供給量、即ちサービス率は μ_i である。

背後過程の状態が $i \in \mathbb{D}$ のとき、率 γ_i のポアソン過程に従って binomial catastrophe が発生する。背後過程の状態が i のときに binomial catastrophe が発生すると、客は互いに独立に確率 $p_i \in (0, 1)$ で系に残り、確率 $1 - p_i$ でサービス完了を待たず系から離脱する。

3. スケーリングモデル

本研究では、次のスケーリング則を考える。 N と $\alpha > 0$ に対し各 $i, j \in \mathbb{D}$ で、到着率 λ_i を N 倍、背後過程の推移率 $q_{i,j}$ を N^α 倍、binomial catastrophe の発生率 γ_i を N 倍、binomial catastrophe 発生時の離脱確率 $1 - p_i$ を N^{-1} 倍する。スケーリングモデルの時刻 t での系内客数を $M^{(N)}(t)$ 、背後過程の状態を $J^{(N)}(t)$ とすると、 $\{(M^{(N)}(t), J^{(N)}(t))\}$ は状態空間 $\{0, 1, \dots\} \times \mathbb{D}$ 上の連続時間マルコフ連鎖である。 $\{(M^{(N)}(t), J^{(N)}(t))\}$ は定常分布 $(M^{(N)}, J^{(N)})$ を持つことを仮定する。

係数 α は到着率と背後過程の推移率のスケーリングの大きさに差をもたらす。本研究では α は正の値としているが、 α が 1 より大きい場合と小さい場合で系が異なる挙動をすることが実験的に確認されている (図 1)。また各 $i \in \mathbb{D}$ で、背後過程が状態 i のときの binomial catastrophe による離脱率は N や α の値に依らず $\gamma_i(1 - p_i)$ で一定である。さらに、サービス率にはスケーリングを施していないため、このスケーリングモデルの系からの離脱率は、 N と α の値に依らず一定である。

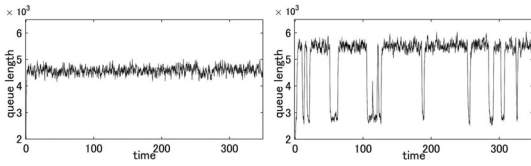


図1 系内容数過程 $\{M^{(N)}(t)\}$ のサンプルパス. $\alpha = 2$ (左) と $\alpha = 0.1$ (右) の場合. 他のパラメータは共通.

4. 中心極限定理

定常系内容数分布の中心極限定理が成立することを示すためにまず, 確率変数 $M^{(N)}N^{-1}$ の確率収束先に関する補題を示す¹. (1) 式で与えられる確率収束先 ρ の分子は元のモデルにおける単位時間当たりの平均到着客数で, 分母は系からの客の平均離脱率である.

補題 1. 確率変数 $M^{(N)}N^{-1}$ を $N \rightarrow \infty$ としたとき, 以下の式で与えられる定数 ρ に確率収束する².

$$\rho = \frac{\tau \Lambda \bar{X} e}{\tau [M + \Gamma(I - P)] e}. \quad (1)$$

次に, 定常系内容数分布の中心極限定理が成立することを示し, その証明の概略を述べる.

定理 1 (中心極限定理). 確率変数

$$N^{\beta/2} \left(\frac{M^{(N)}}{N} - \rho \right), \quad (2)$$

は $N \rightarrow \infty$ としたとき, 平均ゼロと分散 σ^2 の正規分布に従う確率変数に弱収束する. ただし, $\beta = \min(\alpha, 1)$ であり, σ^2 は以下の式で与えられる³.

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma_1^2 \mathbf{1}_{\{\alpha \leq 1\}} + \sigma_2^2 \mathbf{1}_{\{\alpha \geq 1\}}, \\ \sigma_1^2 &= \frac{\tau F (e \cdot \tau - Q)^{-1} F e}{\tau [M + \Gamma(I - P)] e}, \\ \sigma_2^2 &= \frac{\tau [\lambda \underline{X} + \rho M + \rho \Gamma(I - P) + \rho^2 \Gamma(I - P)^2] e}{\tau [M + \Gamma(I - P)] e}, \\ F &= [\Lambda \bar{X} - \rho M - \rho \Gamma(I - P)]. \end{aligned}$$

証明の概略. 確率変数 (2) の特性関数が満たす微分方程式を導く. そしてこの微分方程式を用いて, (2) の特性関数を $N \rightarrow \infty$ とすると, 平均ゼロと分散 σ^2 の正規分布の特性関数に各点収束することを示す.

¹ 解析で次の対角行列を利用する, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d)$, $M = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_d)$, $\bar{X} = \text{diag}(E[X_1], \dots, E[X_d])$, $\underline{X} = \text{diag}(E[X_1^2], \dots, E[X_d^2])$, $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_d)$, $P = \text{diag}(p_1, \dots, p_d)$.

² $e = (1, \dots, 1)^T$

³ $\mathbf{1}_A$: 事象 A の指示関数

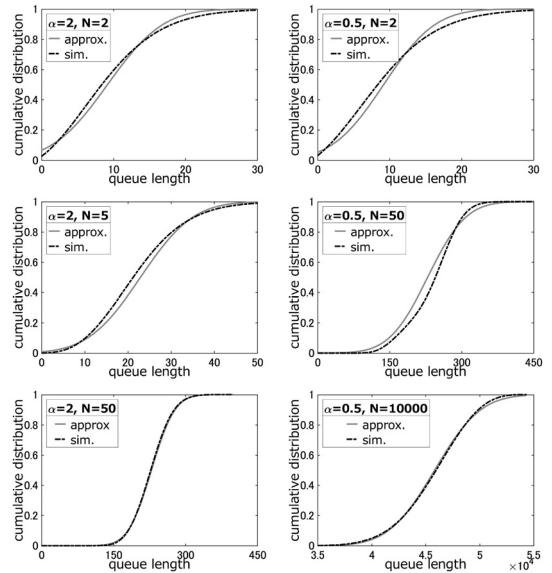


図2 $\alpha = 2$ での比較

図3 $\alpha = 0.5$ での比較

5. 定常系内容数分布の正規近似

定理 1 の中心極限定理から, 到着率が大きい場合に有用な定常系内容数分布の正規近似が得られる.

$$P(M^{(N)} \leq x) \simeq \Phi_{(0, \sigma^2)} \left(N^{\beta/2} \left(\frac{x}{N} - \rho \right) \right), \quad x \geq 0. \quad (3)$$

ただし, $\Phi_{(0, \sigma^2)}(\cdot)$ は平均ゼロと分散 σ^2 の正規分布の累積分布関数.

6. 数値実験

図 2, 図 3 では, シミュレーションで得た $M^{(N)}$ の分布 (黒色破線) と (3) 式の近似 (灰色実線) を比較している. 全ての場合で α と N 以外のパラメータは共通である. 図 2 の $\alpha = 2 (> 1)$ の場合では, N があまり小さくなくても近似式はシミュレーション結果に近い. 一方, 図 3 の $\alpha = 0.5 (< 1)$ の場合では, N を大きくしなければ近似式はシミュレーション結果に近づくかない. すなわち定理 1 で示された収束は, α が 1 より大きい場合は速く, α が 1 より小さい場合は遅いと推測される.

参考文献

[1] J. Blom and K. De Turck and M. Mandjes, "A central limit theorem for Markov-modulated infinite-server queues," In *Proceedings of ASMTA 2013, Lecture Notes in Computer Science*, **7984**, pp. 81–95, 2013.