多目的最適化問題：降下法の基礎

福田　エレン　秀美

多目的最適化問題において，2000 年から，単一目的関数の問題に対する最適化手法を拡張したアプローチが研究されてきた．そのアプローチは，目的関数値が減少する点を繰り返し求めていく手法であるため，降下法と呼ばれる．解への収束に対して理論的保証もあり，さらに厳密な解を求めることができるため，近年注目を集めている．本稿では，降下法を代表とする最急降下法，射影勾配法およびニュートン法を紹介する．また，降下法を基にした関連研究の内容，たとえば正確でない探索方向，ロバスト性を加えた問題と非単調直線探索についても簡単に触れる．

キーワード：多目的最適化，最急降下法，ニュートン法，射影勾配法，パレート最適

1. はじめに

ある制約条件の下で，複数の目的関数を最小化，もしくは最大化するような問題は工学，経営学，経済学，社会学など，さまざまな分野において存在し，**多目的最適化問題**と呼ばれている．多目的最適化は，非線形計画問題と呼ばれる単一目的関数の最適化問題を一般化したものである．その問題において，すべての目的関数を同時に最小化，もしくは最大化するような最適解が存在するとは限らない．そこで，解の最適性に関して，**パレート最適**またはパレート効率性という新たな概念が必要となる．パレート解とは，ある目的関数値を改善しようとしたときに，少なくとも一つのほかの目的関数値が改悪されてしまうような解である．パレート解は一般的に唯一に定まらず，集合となる．その集合は**パレートフロンティア**と呼ばれ，目的関数のトレードオフを示しているため，実際の解はその中から選ぶことになる．

多目的最適化問題に対する一つの主要な解法は**スカラー化手法**と呼ばれ，いくつかの単一目的関数をもつ最適化問題を解くことで，元の多目的な問題の解を得る方法である [1–3]．代表的なスカラー化手法として，目的関数の非負線形結合を最適化する加重平均法という方法があるが，問題の形式やパラメータによっては，非有界な問題に変換されてしまう．そこで，線形加重和の代わりに劣線形関数を用いた劣線形スカラー化手法などが提案された [4, 5]．しかし，意思決定の際に決めなければならないパラメータの適正な値は事前にわからない．その欠点を克服するため，多目的最適化問題に対するスカラー化しない手法も提案されている．たとえば，ヒューリスティック解法や，単一目的関数の問題に対する最適化アルゴリズムを拡張したものなどが存在する．前者の手法は収束に関する証明はされておらず，必ずしも短時間で解が得られるとは限らない．

単一目的関数の問題に対する最適化手法の拡張については，多目的最適化問題だけでなく，それを拡張したベクトル最適化問題に対しても 2000 年から研究されてきた．ベクトル最適化問題は非負錐の代わりに一般の凸錐を順序錐として用いる最適化問題である [4]．これまで，最急降下法 [6, 7]，射影勾配法 [8, 9]，近接点法 [10]，ニュートン法 [11, 12]，劣勾配法 [13]，外点ペナルティ法 [14] などが提案されており，収束に関する証明もされている．さらに，それらを基にして，リーマン多様体上の問題に対する手法 [15]，正確でない探索方向を用いる方法 [16]，信頼領域法 [17] なども開発されている．ここでは，多目的最適化問題を対象に，上記で述べた拡張手法の中から代表として最急降下法を中心に説明し，射影勾配法とニュートン法についても簡単に紹介する．それらの手法はすべて降下法と呼ばれ，パレートフロンティアを正確に求めるときに役立つ．その降下法の詳しい内容や証明に関しては，サーベイ論文 [18] を参考にしていただきたい．

本稿の構成は次のとおりである．まず 2 節では，簡単な記号も含め，多目的最適化問題におけるパレート最適性の概念や，解法の一つであるスカラー化手法について説明する． 3 節では，多目的最適化問題に対する最急降下法を詳しく述べ，さらに 4 節では，射影勾配法とニュートン法を簡単に紹介する． 5 節では，これらの手法に関連する三つの研究内容について説明する．最後に， 6 節で結論を述べる．

ふくだ　えれん　ひでみ
京都大学大学院情報学研究科
〒 606–8501 京都府京都市左京区吉田本町
ellen@i.kyoto-u.ac.jp

2. 多目的最適化問題

本稿で対象とする多目的最適化問題は，次のように表される．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & F(x) \\ \text{subject to} & x \in C \end{array} \tag{1}$$

ただし，C は $\mathbb{R}^n$ の部分集合であり，$F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は $F_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i=1,\ldots,m)$ を成分とする連続的微分可能なベクトル値関数である．すなわち，任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$F(x) := \bigl(F_1(x), \ldots, F_m(x)\bigr)^\top$$

となる．ただし，記号 $\top$ は転置を表す．集合 $C = \mathbb{R}^n$ のとき，問題 (1) は無制約な多目的最適化問題という．また，$m = 1$ の場合，問題 (1) は通常の単一目的関数の最適化問題（非線形計画問題）である．

単一目的関数の最適化問題の場合，最適化の意味が明らかであり，任意の $x \in C$ に対して $F(x^*) \leq F(x)$ を満たす $x^* \in C$ が（大域的）最適解として定義される．一方，多目的最適化問題においては，すべての目的関数を同時に最小化するような解が存在するとは限らない．そこで，解の最適性に関してパレート最適という新たな概念が必要となる．そのために，$\mathbb{R}^m$ において，次のような不等号を考える：$u = (u_1, \ldots, u_m)^\top \in \mathbb{R}^m$, $w = (w_1, \ldots, w_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ に対して，

$$\begin{array}{lll} u \leq w & \Longleftrightarrow & u_i \leq w_i \ (i=1,\ldots,m) \\ u < w & \Longleftrightarrow & u_i < w_i \ (i=1,\ldots,m) \end{array}$$

と定義する．多目的最適化問題において，

$$F(x) \leq F(x^*) \quad \text{かつ} \quad F(x) \neq F(x^*)$$

となる $x \in C$ が存在しないような $x^* \in C$ を**パレート解** (Pareto optimal) という．一方，

$$F(x) < F(x^*)$$

となるような $x \in C$ が存在しないような $x^* \in C$ を**弱パレート解** (weakly Pareto optimal) という．パレート解は有効解 (efficient solution) や非劣解 (nondominated solution) とも呼ばれる．$F(C) := \{F(x) : x \in C\}$ として，図 1 は，目的関数が二つある最適化問題に対して，目的空間における弱パレート解（左）とパレート解（右）を太い線で表している．明らかに，パレート解は弱パレート解であるが，逆は必ずしも成り立たない．

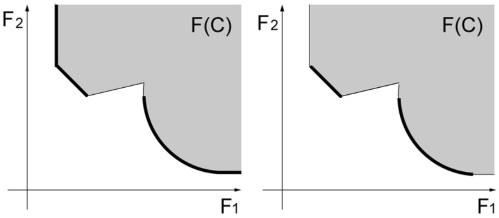

図 1 弱パレート解およびパレート解の例

ここで，ベクトル値関数 F に対して定義される行列 $JF(x) := \bigl[\nabla F_1(x) \ldots \nabla F_m(x)\bigr]^\top \in \mathbb{R}^{m \times n}$ を点 x におけるヤコビ行列とし，$\nabla F_i(x) \in \mathbb{R}^n$ を実数値関数 F_i の点 x における勾配とする．また，正の実数の集合を $\mathbb{R}_{++}$ と表し，$\mathbb{R}^m_{++} := \mathbb{R}_{++} \times \cdots \times \mathbb{R}_{++}$ とする．多目的最適化問題において，

$$JF(\bar{x})(C - \bar{x}) \cap \bigl[-\mathbb{R}^m_{++}\bigr] = \emptyset$$

を満たすような $\bar{x} \in C$ を**パレート停留点** (Pareto stationary) という．すなわち，$\bar{x} \in C$ がパレート停留点であることは，任意の $d \in C - \bar{x}$ に対して $JF(\bar{x})d \not< 0$ が成り立つことと等価である．また，$m = 1$ の場合を考えると，パレート停留点であることは任意の $x \in C$ に対して，$\nabla F(\bar{x})^\top(x - \bar{x}) \geq 0$ が成立することであり，単一目的関数の最適化問題の停留点の概念と一致している．さらに $C = \mathbb{R}^n$ の条件を追加すると，$\nabla F(\bar{x}) = 0$ となる．

明らかに，点 $x \in C$ がパレート停留点でないとき，$JF(x)d < 0$ を満たすような $d \in C - x$ が存在する．次の補題は，そのような d を用いると，任意の $t \in (0, \bar{\varepsilon}]$ に対して，$F(x + td) < F(x)$ を満たすような $\bar{\varepsilon} > 0$ が存在することを表している．このような条件を満たすベクトル d を x における F の**降下方向**という．

補題 2.1. [8, 命題 1] 定数 $\sigma \in (0,1)$，点 $x \in C$ と $JF(x)d < 0$ を満たす $d \in C - x$ に対して，

$$F(x + td) < F(x) + \sigma t JF(x)d \quad (\forall t \in (0, \bar{\varepsilon}])$$

を満たすような $\bar{\varepsilon} > 0$ が存在する．特に，d は x における F の降下方向となる．

上の補題から，パレート停留点であることが，(弱) パレート最適解となるための必要条件である．それらは，図 2 の二つの記号「⇒」に該当している．さらに，[11, 定義 3.1] より，制約集合 C と各関数 F_i $(i = 1, \ldots, m)$ が凸のとき，パレート停留点は弱パレート解であるこ

図 2　パレート解，弱パレート解とパレート停留点の関係性

とが示される．しかし，凸性の下で，パレート停留点がパレート解であるとは限らない．そのためには，すべての i に対して，F_i が狭義凸関数である必要がある．それら十分条件に関しては，図 2 の二つの記号「$\Leftarrow$」に該当している．

本節の最後に，多目的最適化問題の解法の一つであるスカラー化手法の中で，古くから知られている加重平均法を説明する．具体的には，ある重みベクトル $\omega \in \mathbb{R}^m$ を用いて，以下の単一目的関数の最適化問題を考える．

$$\begin{aligned} \underset{x}{\text{minimize}} \quad & F(x)^\top \omega \\ \text{subject to} \quad & x \in C \end{aligned} \tag{2}$$

ただし，ω は一般性を失わずに $\omega_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ かつ $\sum_{i=1}^m \omega_i = 1$ を満たすとする．問題 (2) の解は問題 (1) のパレート最適解の候補である．F が凸関数であれば，加重平均法はパレートフロンティアを求めることができる．しかし，どのような重みベクトルを用いればよい解が求まるかは既知ではない．また，凸でない一般の問題に対しては，重みベクトルによって問題 (2) が非有界となる可能性もある．

たとえば，$m = 2$, $C = \mathbb{R}$ とし，次の目的関数を用いる多目的最適化問題を考える．

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \xi\sqrt{1+x^2} - x \\ F_2(x) &= \xi\sqrt{1+x^2} \end{aligned}$$

ただし，$\xi \in (0, 1)$ であり，この問題のパレートフロンティアは $[0, +\infty)$ である．加重平均法で用いる重みを $\omega = (\omega_1, \omega_2) = (\omega_1, 1 - \omega_1)$ とすると，問題 (2) の目的関数は

$$f_\omega(x) := \omega_1 F_1(x) + (1 - \omega_1) F_2(x)$$

となる．ここで，

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_\omega(x)}{x} = \xi - \omega_1$$

が成り立つため，$\omega_1 > \xi$ のとき f_ω は下に有界でないことがわかる．そのため，重みベクトルの取り方が $\omega_1 \in (0, \xi]$ に限定され，ξ が小さいほど重みベクトルを定めにくくなる．

上記の欠点を踏まえ，以降では単一目的関数の問題に対する最適化手法の拡張を紹介する．それらの解法はすべて反復法である．すなわち，点列 $\{x^k\}$ を

$$x^{k+1} := x^k + t_k d^k$$

に従って生成していく．ここで，d^k は探索方向，t_k はステップサイズである．単一目的関数の最適化問題と同様に，目的関数を最小にするステップサイズが最も適切であるが，正確に計算するのは困難であるため，アルミホ条件と呼ばれるルールを用いる．補題 2.1 はそのアルミホ条件を用いるのが可能であることを示している．

3. 最急降下法

本節では，$C = \mathbb{R}^n$，すなわち無制約な多目的最適化問題について述べる．単一目的関数の無制約最適化問題における最急降下法では，k 回目の反復に $d^k = -\nabla F(x^k)$ という探索方向が選ばれる．ここでは，[6] で提案された多目的最適化問題に対する最急降下法を説明する．

まず，点 $x \in \mathbb{R}^n$ を用いて，以下の関数 $\varphi_x \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を定義する．

$$\varphi_x(d) := \max_{i=1,\ldots,m} \nabla F_i(x)^\top d \tag{3}$$

関数 φ_x は線形な関数の最大値であるため，凸関数となる．この関数を用いて，以下の問題を考える．

$$\begin{aligned} \underset{d}{\text{minimize}} \quad & \varphi_x(d) + \frac{1}{2}\|d\|^2 \\ \text{subject to} \quad & d \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{4}$$

ただし，$\|d\| := (d_1^2 + \cdots + d_n^2)^{1/2}$ はユークリッドノルムである．この問題の目的関数は強凸関数であるため，唯一の解をもつ．その解を

$$d(x) := \underset{d \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \, \varphi_x(d) + \frac{1}{2}\|d\|^2 \tag{5}$$

と書き，多目的最適化問題 (1) の最急降下方向と呼ぶ．また，その目的関数値を

$$\theta(x) := \varphi_x(d(x)) + \frac{1}{2}\|d(x)\|^2 \tag{6}$$

と定義する．$m = 1$ の場合，$\varphi_x(d) = \nabla F(x)^\top d$ となり，$d(x) = -\nabla F(x)$，すなわち単一目的関数の最小化問題における最急降下方向である．また，スラック変数を用いて，問題 (4) は次のように書き換えられる．

$$\begin{aligned} \underset{\tau, d}{\text{minimize}} \quad & \tau \\ \text{subject to} \quad & \nabla F_i(x)^\top d + \frac{1}{2}\|d\|^2 - \tau \leq 0 \\ & (i = 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

ただし，この問題の変数は $(\tau, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ であり，凸

計画問題であるため，さまざまなソルバーで解くことができる．

ここで，問題 (4) の最適性の必要条件から

$$d(x) = -\sum_{i=1}^{m} \omega_i(x)\nabla F_i(x) = -JF(x)^\top \omega(x)$$

かつ $\sum_{i=1}^{m} \omega_i(x) = 1$, $\omega_i(x) \geq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ を満たす $\omega(x) \in \mathbb{R}^m$ が存在することがわかる．よって，$d(x)$ は重み $\omega = \omega(x)$ を用いた単一目的関数の問題 $\min\langle F(x), \omega\rangle$ に対する通常の最急降下方向であることがわかる．これは，未知の重み $\omega(x)$ を用いて，加重平均法を適用していることと等価である．事前に重みを与える必要がある加重平均法とは異なり，ここでは問題 (4) を解くだけのため，未知の重み $\omega(x)$ を陽に扱う必要はない．

次の命題は，関数 $\theta(\cdot)$ や $d(\cdot)$ の性質とパレート停留点との関係性を示している．

命題 3.1. [6, 補題 1] $d\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ および $\theta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ がそれぞれ式 (5) および式 (6) で定義される関数とする．そのとき，問題 (1) に対して，以下が成り立つ．

a. 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\theta(x) \leq 0$ である．
b. 写像 $\theta(\cdot)$ および $d(\cdot)$ は連続である．
c. 次の三つは等価である：x がパレート停留点である，$\theta(x) = 0$, $d(x) = 0$.
d. 次の三つは等価である：x がパレート停留点でない，$\theta(x) < 0$, $d(x) \neq 0$.

命題 3.1(d) から，点 x がパレート停留点でないとき，$\theta(x) < 0$ となり，さらに 式 (6) から $\varphi_x(d(x)) < -\frac{1}{2}\|d(x)\|^2 < 0$ が得られる．よって，$JF(x)d(x) < 0$ が成り立つので，補題 2.1 から，$d(x)$ が降下方向であることが示される．以上の結果を基にして，次のようにアルゴリズムを構築する．

アルゴリズム 3.2. 多目的最適化問題に対する最急降下法

1. 定数 $\varepsilon > 0$, $\nu \in (0,1)$ と $\sigma \in (0,1)$, 初期点 $x^0 \in \mathbb{R}^n$ を選び，$k := 0$ とする．
2. 式 (5) を用いて，方向 $d^k := d(x^k)$ を計算する．
3. 式 (6) を用いて，$\theta(x^k)$ を計算する．
   $|\theta(x^k)| < \varepsilon$ なら，終了する．
4. アルミホ条件

$$F(x^k + td^k) \leq F(x^k) + \sigma tJF(x^k)d^k \quad (7)$$

   を満たす最大の $t \in \{\nu^j : j = 0, 1, 2, \ldots\}$ を選び，それをステップサイズ t_k とする．
5. $x^{k+1} := x^k + t_k d^k$, $k := k + 1$ として，ステップ 2 に戻る．

定数 ε が十分小さいとき，理論的にステップ 3 は $\theta(x^k) = 0$ を意味している．さらに，アルゴリズムがステップ 3 で終了したときは，命題 3.1 より，x^k はパレート停留点であることがわかる．また，命題 3.1 および補題 2.1 より，ステップ 4 におけるステップサイズの計算は有限回で終了する．アルゴリズムの計算途中ではステップ 4 と d^k が $JF(x^k)d^k < 0$ を満たすことから，

$$F(x^{k+1}) < F(x^k) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

が成り立つ．すなわち, 目的関数値が単調減少していく．

アルゴリズム 3.2 はパレート停留点で終了するか，または無限回の反復を行う．次の議論では，停留点でない無限個の点列 $\{x^k\}$ が生成されることを仮定している．

定理 3.3. [6, 定理 1] アルゴリズム 3.2 によって生成される点列 $\{x^k\}$ の集積点はパレート停留点である．

ここで，目的関数 F が有界なレベル集合 $\{x \in \mathbb{R}^n\colon F(x) \leq F(x^0)\}$ をもつとする．そのとき，$\{F(x^k)\}$ が単調減少するので，$\{x^k\}$ はその集合に属し，有界であることがわかる．したがって，$\{x^k\}$ は少なくとも一つの集積点をもち，定理 3.3 からそれがパレート停留点であることが示される．次の定理では，F に凸性を仮定するが，その場合はパレート停留点は弱パレート解であるための必要十分条件であることが知られている．

定理 3.4. [6, 定理 3.11] 単調減少数列 $\{y^k\} \subseteq F(\mathbb{R}^n) := \{F(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ は $F(\mathbb{R}^n)$ のある点によって下に有界であると仮定する．さらに，F は凸関数とする．そのとき，最急降下法（アルゴリズム 3.2）で生成される点列 $\{x^k\}$ は弱パレート解に収束する．

以上のように，アルゴリズム 3.2 は一つのパレート解，もしくは弱パレート解を得る方法である．しかしながら，実用上は一つの解だけでなく，（弱）パレートフロンティアが要求される場合がある．そのようなときでも，さまざまな初期点を用いることによって，パ

レートフロンティアを得ることができる．

4. 射影勾配法とニュートン法

本節では，多目的最適化問題に対する射影勾配法とニュートン法の概要を述べる．まず，[8, 9] で提案されている射影勾配法について説明する．問題 (1) の制約集合 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ を空でない閉凸集合とする．そのとき，射影勾配法で用いられる探索方向は式 (5) の拡張であり，

$$d(x) := \operatorname*{argmin}_{d \in C - x} \beta \varphi_x(d) + \frac{1}{2}\|d\|^2 \tag{8}$$

と定義される．ここで，β は正のパラメータであり，φ_x は 式 (3) で定義される関数である．また，$P_C(u)$ を点 u の集合 C への射影，すなわち C の点のなかで，u との距離が最小となるものとする．$m = 1$ のとき，式 (8) は $d(x) = P_C(x - \beta \nabla F(x)) - x$ であるため，単一目的関数の最小化問題における射影勾配方向となる．さらに，$d(x)$ の最適性条件から，

$$d(x) = P_C\left(x - \beta JF(x)^\top \omega(x)\right) - x$$

かつ $\sum_{i=1}^m \omega_i(x) = 1,\ \omega_i(x) \geq 0\ (i = 1, \ldots, m)$ を満たす $\omega(x) \in \mathbb{R}^m$ が存在することがわかる．ここで $\omega(x)$ は未知であることに注意する．前節と同様に式 (8) の問題の最適値を

$$\theta(x) := \beta \varphi_x(d(x)) + \frac{1}{2}\|d(x)\|^2$$

とする．このように探索方向 $d\,(x)$ と最適値 $\theta(x)$ を定めると，前節と同じく命題 3.1 が成立し，射影勾配法の構成もアルゴリズム 3.2 と同様に記述される．これらの結果から，次の収束に関する定理が得られる．

定理 4.1. [9, 定理 5.6] 単調減少数列 $\{y^k\} \subseteq F(C) := \{F(x) \colon x \in C\}$ は $F(C)$ のある点によって下に有界であることを仮定する．また，F は凸関数とする．そのとき，射影勾配法で生成される点列 $\{x^k\}$ は弱パレート解に収束する．

次にニュートン法の概要を紹介する．前節と同様に，多目的最適化問題 (1) の制約集合を $C = \mathbb{R}^n$ とする．また，各目的関数 F_i は強凸で 2 回連続的微分可能とする．さらに，各 $i = 1, \ldots, m$ に対して，$\psi_i \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を以下のように定義する．

$$\psi_i(x, d) := \nabla F_i(x)^\top d + \frac{1}{2} d^\top \nabla^2 F_i(x) d$$

ただし，$\nabla^2 F_i(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は関数 F_i の点 x におけるヘッセ行列とする．ここから，$d \mapsto F_i(x) + \psi_i(x, d)$ は x における F_i の局所 2 次近似であることがわかる．そのような関数 ψ_i を用いて，点 $x \in \mathbb{R}^n$ に対するニュートン方向を

$$d(x) := \operatorname*{argmin}_{d \in \mathbb{R}^n} \max_{i=1,\ldots,m} \psi_i(x, d) \tag{9}$$

と定義する．ただし，$\psi_i(x, \cdot)$ は強凸関数なため，式 (9) の無制約な最適化問題は唯一の解をもつ．ここで，$m = 1$ の場合，$d(x) = -\nabla^2 F(x)^{-1} \nabla F(x)$ であるため，単一目的関数の最適化問題に対するニュートン方向となる．さらに，式 (9) の問題の最適値を $\theta(x) := \max_{i=1,\ldots,m} \psi_i(x, d(x))$ とすると，命題 3.1 が成立し，アルゴリズム 3.2 と同様にニュートン法も構成される．また，最適性条件から

$$d(x) = -\left[\sum_{i=1}^m \omega_i(x) \nabla^2 F_i(x)\right]^{-1} \sum_{i=1}^m \omega_i(x) \nabla F_i(x) \tag{10}$$

かつ $\sum_{i=1}^m \omega_i(x) = 1,\ \omega_i(x) \geq 0\ (i = 1, \ldots, m)$ を満たす未知の $\omega(x) \in \mathbb{R}^m$ が存在することがわかる．次のように，ニュートン法に対しては，収束率についても示されている．

定理 4.2. [11, 系 6.2, 系 6.3] 初期点 $x^0 \in \mathbb{R}^n$ が F のコンパクトなレベル集合に属しているとする．ニュートン法で生成される点列 $\{x^k\}$ はパレート解に収束する．さらに，十分大きい k に対して，$t_k = 1$ となり，$\{x^k\}$ はパレート解に超 1 次収束する．また，$\nabla^2 F_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ がリプシッツ連続のとき，2 次収束する．

5. その他の研究内容

ここでは，関連する研究成果として三つの内容を簡単に紹介する．一つ目は射影勾配法の探索方向 (8) が正確でない場合に関する内容であり，[16] で議論されている．具体的に，点 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して，$d \in C - x$ が

$$\beta \varphi_x(d) + \frac{1}{2}\|d\|^2 \leq (1 - \epsilon)\theta(x)$$

を満たすとき，ϵ 近似方向という．ただし，$\epsilon \in [0, 1)$ であり，$\epsilon = 0$ のときは正確な方向 $d(x)$ が唯一の 0 近似方向である．上記のような ϵ 近似方向を用いても，定理 4.1 などと同様の結果が示されている．また，[18] のサーベイ論文においても，ϵ 近似方向を用いた最急

降下法やニュートン法が議論されている.

次に，ロバスト性を加味した多目的最適化問題について述べる．多目的最適化問題に対しては，多くの応用例が存在するが，実問題では通常，データや解に不確実性が含まれている．そこで，そのような不確実な状況下で最適化する際には，さまざまな状況を想定する必要がある．そのときに用いられる手法の一つがロバスト最適化である．近年，多目的最適化問題とロバスト最適化を組み合わせた研究がなされてきた [19, 20]. 特に前節で述べた手法を基にした研究として，[21] では，変数が不確実である場合を対象とした次の問題が考えられている.

$$\min_{x \in C} \begin{pmatrix} \max\limits_{\Delta x \in \mathcal{U}} F_1(x + \Delta x) \\ \vdots \\ \max\limits_{\Delta x \in \mathcal{U}} F_m(x + \Delta x) \end{pmatrix}$$

ただし，$\mathcal{U} := \{\Delta x \in \mathbb{R}^n \colon \|\Delta x\| \leq \Gamma\}$ は不確実性集合であり，$\Gamma > 0$ である．これは，問題 (1) に対して，不確実性の下での最悪な場合を想定した問題となっている．[21] では，上記の問題に対して，ロバストパレート解を定義し，新たな手法が提案されている.

最後に，非単調直線探索を用いた手法について説明する．前節で述べたすべての手法は，各反復で目的関数値が減少するものとなっている．なぜなら，ステップサイズの選択の際にアルミホ条件を考慮しているためである．しかし，単一目的関数の最適化問題と同様に，非単調直線探索を用いると効率が良くなる場合がある．そのため，[22] では，アルミホ条件 (7) の代わりに次の条件が用いられている.

$$F(x^k + td^k) \leq \hat{F}^k + \sigma tJF(x^k)d^k$$

ここで，$\hat{F}^k$ はいくつか前までの目的関数値の最大値，もしくは凸結合で計算される値である.

6. おわりに

多目的最適化問題に対する多くの手法は一つのパレート解，もしくは弱パレート解を得る方法であり，本稿で紹介した降下法もその一つである．しかしながら，実用上は一つの解だけでなく，パレートフロンティアそのものが要求される場合がある．そのようなときは，さまざまなパラメータ，もしくは初期点を用いて，アルゴリズムを何度も実行すればよい．ただし，実際に必要とされるパレート解はパレートフロンティアの一部であり，各初期点に対して厳密に解を求めなくてもよい．たとえば，ヒューリスティック解法などを用いると，近似的なパレートフロンティアが得られる．そこで，より厳密な解が欲しい場合は，近似パレートフロンティア上の解を初期点として，収束性が保証されている手法で解を精錬すればよい．そのときに，特に有効となるのが，任意の初期点から始められる降下法である．このような理由からも，降下法に関する研究は重要だと考えられる.

参考文献

[1] J. Jahn, “Scalarization in vector optimization,” *Mathematical Programming*, **29**, pp. 203–218, 1984.

[2] D. T. Luc, “Scalarization of vector optimization problems,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, **55**, pp. 85–102, 1987.

[3] 中山弘隆，谷野哲三，『多目的計画法の理論と応用』，計測自動制御学会，1994.

[4] D. T. Luc, *Theory of Vector Optimization*, Springer, Berlin, 1989.

[5] Y. Ogata, Y. Saito, T. Tanaka and S. Yamada, “Sublinear scalarization methods for sets with respect to set-relations,” *Linear and Nonlinear Analysis*, **3**, pp. 121–132, 2017.

[6] J. Fliege and B. F. Svaiter, “Steepest descent methods for multicriteria optimization,” *Mathematical Methods of Operations Research*, **51**, pp. 479–494, 2000.

[7] L. M. Graña Drummond and B. F. Svaiter, “A steepest descent method for vector optimization,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **175**, pp. 395–414, 2005.

[8] L. M. Graña Drummond and A. N. Iusem, “A projected gradient method for vector optimization problems,” *Computational Optimization and Applications*, **28**, pp. 5–29, 2004.

[9] E. H. Fukuda and L. M. Graña Drummond, “On the convergence of the projected gradient method for vector optimization,” *Optimization*, **60**, pp. 1009–1021, 2011.

[10] H. Bonnel, A. N. Iusem and B. F. Svaiter, “Proximal methods in vector optimization,” *SIAM Journal on Optimization*, **15**, pp. 953–970, 2005.

[11] J. Fliege, L. M. Graña Drummond and B. F. Svaiter, “Newton’s method for multiobjective optimization,” *SIAM Journal on Optimization*, **20**, pp. 602–626, 2009.

[12] L. M. Graña Drummond, F. M. P. Raupp and B. F. Svaiter, “A quadratically convergent Newton method for vector optimization,” *Optimization*, **63**, pp. 661–677, 2014.

[13] J. X. Cruz Neto, G. J. P. Silva, O. P. Ferreira and J. O. Lopes, “A subgradient method for multiobjective optimization,” *Computational Optimization and Applications*, **54**, pp. 461–472, 2013.

[14] E. H. Fukuda, L. M. Graña Drummond and F. M. P. Raupp, “An external penalty-type method for multicriteria,” *TOP*, **24**, pp. 493–513, 2016.

[15] G. C. Bento, O. P. Ferreira and P. R. Oliveira, “Unconstrained steepest descent method for multicriteria

optimization on Riemannian manifolds," *Journal of Optimization Theory and Applications*, **154**, pp. 88–107, 2012.
[16] E. H. Fukuda and L. M. Graña Drummond, "Inexact projected gradient method for vector optimization," *Computational Optimization and Applications*, **54**, pp. 473–493, 2013.
[17] G. A. Carrizo, P. A. Lotito and M. C. Maciel, "Trust region globalization strategy for the nonconvex unconstrained multiobjective optimization problem," *Mathematical Programming*, **159**, pp. 339–369, 2016.
[18] E. H. Fukuda and L. M. Graña Drummond, "A survey on multiobjective descent methods," *Pesquisa Operacional*, **34**, pp. 585–620, 2014.
[19] M. Ehrgott, J. Ide and A. Schobel, "Minmax robustness for multi-objective optimization problems," *European Journal of Operational Research*, **239**, pp. 17–31, 2014.
[20] J. Fliege and R. Werner, "Robust multiobjective optimization and applications in portfolio optimization," *European Journal of Operational Research*, **234**, pp. 422–433, 2014.
[21] M. Morishita, "A descent method for robust multiobjective optimization in the presence of implementation errors," Master's Thesis, Kyoto University, 2016.
[22] 三田佳那子，福田エレン秀美，山下信雄，"多目的最適化問題に対する非単調直線探索を用いた降下法とその大域的収束性，" 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2017 年秋季研究発表会アブストラクト集，pp. 204–205, 2017.

