日本オペレーションズ・リサーチ学会
2021年 春季研究発表会

改良 Chubanov 法の対称錐最適化への拡張

申請中　筑波大学システム情報工学研究科　*加納伸一　KANOH Shinichi
01703540　筑波大学システム情報系　吉瀬章子　YOSHISE Akiko

1. はじめに

2015 年, Chubanov は同次線形計画問題の内点許容解を求める新しいアルゴリズムを提案した [1]. Chubanov 法に関しての研究は, 同アルゴリズムを対称錐計画への拡張や, 線形計画におけるアルゴリズムの計算効率の改善等の研究が行われている. 特に対称錐計画への拡張では, アルゴリズムの収束の解析に用いる評価指標の定め方により異なる拡張が提案されてきた. まず 2017 年に北原・土谷らが 2 次錐計画へ拡張し [3], 2019 年に Lourenço らが評価指標に“ 錐と半空間の交わりの体積 ”を用いた拡張を行った [4]. また 2017 年に Pena らも評価指標に“ 条件数 ”を用いて拡張を行っているが [2], 現在までで提案された拡張はこの 2 種類のみである.

本研究では, 2018 年に Roos が提案した線形計画における Chubanov 法の計算効率の改善 [5] に関する内容を対称錐計画へと拡張し, それらの内容を自然な形でアルゴリズムに組み込めるように“ 任意の実行可能解の固有値の合計値の上界 ”を評価指標として定めることで, 新たな拡張を提案する.

2. Chubanov 法

Chubanov 法は以下の線形実行可能性問題 P(A) を扱う. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ は整数または実数からなる行列であり, $\mathrm{rank}(A) = m$ である. また, $\mathbf{1}$ は全ての要素が 1 の n 次元ベクトルである.

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(A) & \text{find} & x \in \mathbb{R}^n \\ & \text{s.t} & Ax = \mathbf{0} \\ & & \mathbf{0} < x \leq \mathbf{1} \end{array}$$

そして A^T の像空間を $\mathrm{Im}A^T = \{y \in \mathbb{R}^n \mid ^{\exists} u \in \mathbb{R}^m,\ y = A^T u\}$ で定めると P(A) と二者択一の関係が成り立つ問題 $D(A)$ は以下のようになる.

$$\begin{array}{lll} \mathrm{D}(A) & \text{find} & y \\ & \text{s.t} & y \in \mathrm{Im}A^T \\ & & y \geq \mathbf{0}, y \neq 0 \end{array}$$

Chubanov 法は, 外反復の “Main algorithm”(以下, M-A) と内反復の “Basic procedure”(以下, B-P) という二つの構成要素からなり, B-P は有限回の反復で, P(A) の解, D(A) の解, または P(A) の任意の実行可能解 x に対して式 (1) が成り立つインデックス $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ のどれかを返す.

$$0 < x_j \leq \frac{1}{2}. \tag{1}$$

P(A) か D(A) の解が得られた時は P(A) の実行可能性を判断できる. そうでない時は, $D_{jj} = 2$ でそれ以外の対角成分が 1 の対角行列 D を用い, 問題を $\bar{A} = AD^{-1}$ でスケーリングする. そして $\bar{A}$ に対して B-P を呼び出すという操作を繰り返すことで, Chubanov 法は P(A) の実行可能性を調べる.

対称錐計画上での Chubanov 法も基本的な構造は変わらず, 内反復の B-P は有限回の反復で, 扱う問題の実行可能性を判断できるベクトル, または終了条件を満たしたベクトル及びスケーリングに必要な情報を返す.

3. Roos の提案

[5] では, [1] よりもタイトな B-P の終了条件を提案した. [1] では, $\mathbf{1}^T y = 1, y \geq \mathbf{0}, y \notin \mathrm{Im}A^T$ を満たす $y \in \mathbb{R}^n$ と y を $\mathrm{Ker}A$ へ射影した $z \in \mathbb{R}^n$, 及び P(A) の任意の実行可能解 x に対し, $y_j \neq 0$ ならば式 (2) が成り立つことを用い, $\frac{\sqrt{n}\|z\|_2}{y_j} \leq \frac{1}{2}$ を満たす y を見つければ B-P を終了していた.

$$x_j \leq \frac{\sqrt{n}\|z\|_2}{y_j}. \tag{2}$$

それに対し [5] では, $[\cdot]^+$ を非負象限への射影とすると, $v = y - z \in \mathrm{Im}A^T$ を用い, $v_j \neq 0$ ならば式 (3) が成り立つことを示し, $\mathbf{1}^T \left[\frac{-v}{v_j}\right]^+ \leq \frac{1}{2}$ を満たす v を見つければ B-P を終了できると提案した.

$$x_j \leq \min\left\{1, \mathbf{1}^T \left[\frac{-v}{v_j}\right]^+\right\} \leq \frac{\sqrt{n}\|z\|_2}{y_j}. \tag{3}$$

4. 改良 Chubanov 法

本研究は $\mathrm{P}_{S_\infty}(\mathcal{A})$ の実行可能性を調べるアルゴリズムを提案する．対称錐 $\mathcal{K}$ の内部の点の集合を $\mathrm{int}\mathcal{K}$ とし, $\mathcal{A}(\cdot)$ は線形写像とする．$\|x\|_\infty$ は x の固有値の絶対値の最大値を表すとし, $\mathcal{K}$ は複数の simple な対称錐の直積 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \times \cdots \times \mathcal{K}_p$ とする．

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}_{S_\infty}(\mathcal{A}) & \text{find} & x \\ & \text{s.t} & \mathcal{A}(x) = \mathbf{0} \\ & & \|x\|_\infty \leq 1 \\ & & x \in \mathrm{int}\mathcal{K} \end{array}$$

各錐 $\mathcal{K}_\ell$ に対応するユークリッドジョルダン代数 $(\mathbb{E}_\ell, \circ)$ に対し $\mathbb{E}_\ell$ のランクを r_ℓ, 単位元を e_ℓ とする．また $\mathbb{E}_\ell$ の任意の元 a には r_ℓ 個の実数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{r_\ell}$ と Jordan Frame を構成する r_ℓ 個の primitive idempotent $c_1, \cdots, c_{r_\ell}$ が存在し, $a = \sum_{i=1}^{r_\ell} \lambda_i c_i$ のように分解できることが知られている [6].

我々は $\|x\|_\infty \leq 1$ を使用した問題を考えることで, [5] の内容を命題 1 のように対称錐計画へ拡張できることを示した．$\mathrm{Im}\mathcal{A}^T$ は $\mathcal{A}$ の零空間 $\mathrm{Ker}\mathcal{A}$ の直交補空間であり, $\mathcal{P}_\mathcal{K}(\cdot)$ は $\mathcal{K}$ への射影とする．また, $\langle , \rangle$ は $(\mathbb{E}_\ell, \circ)$ で定義される内積とする．

命題 1. 任意の $v = (v_1, \cdots, v_p) \in Im\mathcal{A}^T$ の各ブロック v_ℓ を r_ℓ 個の実数と Jordan Frame を構成する r_ℓ 個の primitive idempotent に分解する．

$$v_\ell = \sum_{i=1}^{r_\ell} \lambda(v_\ell)_i c(v_\ell)_i.$$

$\lambda(v_\ell)_i \neq 0$ ならば, $\mathrm{P}_{S_\infty}(\mathcal{A})$ の任意の実行可能解 x に対して以下の関係が成り立つ．

$$\langle c(v_\ell)_i, x_\ell \rangle \leq \min \left\{ 1, \left\langle e, \mathcal{P}_\mathcal{K}\left(-\frac{1}{\lambda(v_\ell)_i} v \right) \right\rangle \right\}.$$

命題 1 において, $\lambda(v_\ell)_i = 0$ ならば primitive idempotent の定義より $\langle c(v_\ell)_i, x_\ell \rangle \leq 1$ であることは容易に導ける．また $\mathcal{K}$ における単位元を e とすると, x の固有値の合計値は $\langle x, e \rangle = \sum_{\ell=1}^{p} \langle x_\ell, e_\ell \rangle$ であり, Jordan Frame の定義より $\sum_{i=1}^{r_\ell} c(v_\ell)_i = e_\ell$ なので, 命題 1 が $\langle x, e \rangle$ の上界を与えると分かる．つまり, $\left\langle e, \mathcal{P}_\mathcal{K}\left(-\frac{1}{\lambda(v_\ell)_i} v \right) \right\rangle < 1$ となる v が得られれば $\langle x, e \rangle$ の上界は r 以下から r 未満へと狭めることができる．また本研究では, そのような v は B-P の有限回の反復で得られることを示し, さらに v を用いて任意の実行可能解の固有値の合計値の上界が再び r 以下になるような $\mathrm{P}_{S_\infty}(\mathcal{A})$ と等価な問題へとスケーリングする方法を提案した．

提案手法は, $\|\cdot\|_\infty$ により実行可能領域の定量化が可能なため $\mathrm{P}_{S_\infty}(\mathcal{A})$ の任意の実行可能解の最小固有値はいくつ以下かという情報を保ちながら M-A が構築されている．[4] でも同様に, 任意の実行可能解の最小固有値の上界を保持している．

5. おわりに

本研究は提案手法と [2], [4] の手法を同次半正定値錐計画問題において比較する計算機実験を行った．詳細な結果は当日説明するが, 提案手法は既存の手法よりも素早くかつ高い精度で内点許容解の判別を行うことが出来た．半正定値錐最適化では, 凸多面体上で最適化する線形計画問題とは異なり, 内点許容性の判定は一般に難しい．今回の拡張により, Roos の拡張は計算時間に留まらず内点許容性の判定にも強力であることが示された.

参考文献

[1] Chubanov, S. (2015). A polynomial projection algorithm for linear feasibility problems. Mathematical Programming, 153(2), 687-713.

[2] Pena, J., & Soheili, N. (2017). Solving conic systems via projection and rescaling. Mathematical Programming, 166(1-2), 87-111.

[3] Kitahara, T., & Tsuchiya, T. (2018). An extension of Chubanov's polynomial-time linear programming algorithm to second-order cone programming. Optimization Methods and Software, 33(1), 1-25.

[4] Lourenço, B. F., Kitahara, T., Muramatsu, M., & Tsuchiya, T. (2019). An extension of Chubanov ’ s algorithm to symmetric cones. Mathematical Programming, 173(1-2), 117-149.

[5] Roos, K. (2018). An improved version of Chubanov's method for solving a homogeneous feasibility problem. Optimization Methods and Software, 33(1), 26-44.

[6] Faraut, J. & Korányi, A. (1994). Analysis on symmetric cones. Oxford University Press, Oxford, UK.