日本オペレーションズ・リサーチ学会
2021年 春季研究発表会

確率制約条件付きの手術室割り当てに対する数値解法

	東京工業大学	*黒田　航太朗	KURODA Kotaro
01704970	東京工業大学	山下　真	YAMASHITA Makoto
	株式会社エピグノ	乾　文良	INUI Fumiyoshi
	株式会社エピグノ	Malik Olivier Boussejra	
	株式会社エピグノ，東北大学	志賀　卓弥	SHIGA Takuya

1.　はじめに

高齢化社会の進行に伴い、日本の全人口の 4 人に 1 人が 2025 年には後期高齢者 (75 歳以上) になるといわれ、医療の需要がこれまで以上に高まることが指摘されている [1]。病院において手術室は収入源の一つであるが同時に最もコストがかかる場所でもあり、効率的に手術室を活用するためのスケジュールの提供が重要である。いくつかの既存研究では、手術に要する時間を定数として扱い混合整数線形計画問題 (MILP) として定式化しているが、手術に要する時間はたとえ同じ手術でもその時の状況によって変わる可能性がある。手術が予想よりも長くかかってしまった場合、スケジュール全体の遅延につながり患者や病院にとって負担となる。

本研究では、手術に要する時間を確率変数として捉え、確率制約条件付きの最適化問題に対する数値解法を構築する。手術に要する時間は対数正規分布に最もフィットすることが知られおり [2]、本研究の最適化問題では対数正規分布を数理モデルに採り入れている。

2.　数理モデル

手術室のスケジューリング問題では、各手術室の超過時間の最小化や稼働率の最大化などを目的として、それぞれの手術を行う手術室、外科医、日付および開始時刻を決定する。しかし、それらを決定するためには多くの決定変数や制約が必要となり、最適解を求めるのに膨大な時間がかかることが多い。[3] では元の問題を、手術室・外科医・日付のみを割り当てる問題 (ORP) と開始時刻や順番などを決定する問題 (ORS) の 2 つの問題に分割することで高速化を図っている。

紙面の関係上、ORP と ORS の詳細は記述できないが、ここでは確率制約条件を導入するにあたって重要となる制約条件を取り上げる。まず、TP_s, TS_s, TC_s はそれぞれ手術 s の術前処置時間、手術時間、術後処置時間であるとする。T は病院が開院している時間を表しており、病院の始業時刻が 9 時、終業時刻が 17 時の場合は $T = 480$ 分である。決定変数としては、x_{srd} は手術 s が手術室 r で日 d に行われる際に 1、にそうでなければ 0 になるバイナリ変数、ot_{rd} は日 d に手術室 r で発生した超過時間を表す非負変数、ts_s は手術 s の開始時刻を表す非負変数、$y_{ss'rd}$ は手術 s と s' が同じ手術室 r で同じ日 d に行われ、s が s' よりも先に行われるときに 1、そうでなければ 0 になるバイナリ変数とする。

(ORP) では、各手術の開始時刻を計算しないため、各手術室で発生する超過時間を厳密に算出することはできないが、次のような制約式を用いて超過時間の概算を行なっている。

$$\sum_{s \in S} (TP_s + TS_s + TC_s)\, x_{srd} - T \leq ot_{rd} \tag{1}$$

また、(ORS) では 2 つの手術 s, s' が同じ手術室で行われる際にその時間が重ならないようにする制約が課される。

$$ts_{s'} - TP_{s'} \geq ts_s + TS_s + TC_s - M\,(1 - y_{ss'rd}) \tag{2}$$

ただし、M は十分大きな実数である。

3.　確率制約条件

確率制約条件とは制約式が成り立つ確率を一定以上に保つ制約であり、次のように表すことができる。

$$\Pr\left(g\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}\right) \geq 0\right) \geq \alpha \tag{3}$$

ここで、$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は決定変数のベクトル、$\boldsymbol{\xi}$ は確率変数のベクトルを表しており、(3) は $g\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}\right) \geq 0$ という制約が α 以上の確率で成り立つことを保証している。特に g が線形関数の時、以下のように右辺に確率変数が現れるものと、左辺に確率変数が現れるものがある。

$$\Pr\left(\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} \geq \tilde{b}\right) \geq \alpha \tag{4}$$

$$\Pr\left(\tilde{\boldsymbol{a}}^T \boldsymbol{x} \leq b\right) \geq \alpha \tag{5}$$

ただし、$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$ は入力定数であり、$\tilde{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^n, \tilde{b}$ は確率変数、$\alpha \in [0, 1]$ は充足水準である。$\tilde{\boldsymbol{a}}$ と $\tilde{b}$ が正規分布に従うとき以下のように変形可能である。

$$(4) \Leftrightarrow \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} \geq \mu_{\tilde{b}} + \sigma_{\tilde{b}} \Phi^{-1}(\alpha) \tag{6}$$

$$(5) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \mu_{\tilde{a}_i} x_i + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_{\tilde{a}_i}^2 x_i^2 \Phi^{-1}(\alpha)} \leq b \tag{7}$$

表 1: 充足水準 α ごとの比較

α(%)	問題番号	(手術件数, 外科医数, 手術室数, 日数)	違反率 (%)	割り当て件数	計算時間 (秒)
90	1	(20,17,10,1)	0.00	15	2.5
	2	(60,31,10,3)	1.04	46	30.1
	3	(100,44,10,5)	1.12	82	124.7
95	1	(20,17,10,1)	0.00	15	2.5
	2	(60,31,10,3)	0.29	46	35.2
	3	(100,44,10,5)	0.34	78	148.7

ここで、$\mu_{\tilde{b}}, \sigma_{\tilde{b}}^2$ はそれぞれ $\tilde{b}$ の平均と分散であり、$\mu_{\tilde{a}_i}, \sigma_{\tilde{a}_i}^2$ は $\tilde{\boldsymbol{a}}$ の i 番目の要素の平均と分散であり、Φ は標準正規分布の分布関数である。

TP_s, TS_s, TC_s が手術室の作業時間に関係する確率変数であるから対数正規分布に従う確率変数と考える [2] と、(6) と (7) に基づいて (1) と (2) は次のような確率制約条件に変換することができる。

$$
\begin{aligned}
(1) \Rightarrow \quad & \ln\left(\sum_{s\in S^{list}} \mathcal{U}_s x_{srd}\right) \\
& - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sum_{s\in S^{list}} (\mathcal{D}_s)^2 x_{srd}^2}{\left(\sum_{s\in S^{list}} \mathcal{U}_s x_{srd}\right)^2} + 1\right) \\
& + \sqrt{\ln\left(\frac{\sum_{s\in S^{list}} (\mathcal{D}_s)^2 x_{srd}^2}{\left(\sum_{s\in S^{list}} \mathcal{U}_s x_{srd}\right)^2} + 1\right)}\Phi^{-1}(\alpha) \\
& \leq \ln(ot_{rd} + T) \qquad (8) \\
(2) \Rightarrow \quad & ts_{s'} - ts_s \\
& + M(1 - y_{ss'rd}) \geq \exp\left(\sigma_{ss'}\Phi^{-1}(\alpha) + \mu_{ss'}\right) \qquad (9)
\end{aligned}
$$

ここで、$\mathcal{U}_s, \mathcal{D}_s^2$ は手術 s の総合時間（術前処置時間、手術時間、術後処置時間の和）の平均と分散を表しており、$\mu_{ss'}, \sigma_{ss'}$ は $\ln(TS_s + TC_s + TP_{s'})$ の平均と分散を表している。

(8) は非線形の制約になるため、正確な求解が困難である。しかし、(1) の制約は超過時間の概算をしている制約に相当するため正確な値を求めることは重要ではない。本研究では、この制約を線形近似をすることで高速化を行っている。

4. 数値実験

ある病院のデータを用いて数値実験を行った。術前処置時間、手術時間、術後処置時間の平均と分散は各手術が属する診療科ごとに算出している。ここでは、充足水準 α を 90%,95%と変えた場合の結果を紹介する。

本数値実験ではまず、確率制約条件付きの最適化問題を求解し、それぞれの手術を行う手術室、外科医、開始時刻、日付を決定することでスケジュールを作成する。作成されたスケジュールの妥当性を評価するために、それぞれの手術の術前処置時間、手術時間、術後処置時間を乱数で設定した時間とするシミュレーションを行った。作成されたスケジュールでシミュレーションを行うと、低確率ながらも相当長時間の手術が発生するために手術室や外科医が重複しないなどの制約を満たさなくなることがあり得る。表 1 で「違反率」は制約を満たしていない割合を示している。また、入力された手術のうち全てを期間内に実行することができるとも限らないため、「割り当て件数」はスケジュールに割り当てられた手術の数を示している。表 1 によると、充足水準が大きいほど制約違反が起こる可能性は低いが、割り当てられる手術の数は少なくなってしまうことがわかる。これは、充足水準が高いほど手術に要する時間を長く予測するためであると考えられる。例えば、(9) において、$TS_s + TC_s + TP_{s'}$ の予測値は

$$\exp\left(\sigma_{ss'}\Phi^{-1}(\alpha) + \mu_{ss'}\right) \qquad (10)$$

となっているが、Φ^{-1} は増加関数であるため α が大きくなるほど (10) が大きくなることがわかる。手術の予測時間が長くなることで、各手術室の超過時間がその上限に達してしまう可能性が高くなり、割り当てられる手術の数が少なくなる傾向が見て取れる。その一方で、乱数で設定した各手術時間はその予測時間の範囲の最大値よりも短くなる可能性が高くなるため制約違反が起こる確率は低くなると考えられる。

参考文献

[1] 今井博久. 2025 年問題とは何か: 公衆衛生が直面する問題の諸相 *J. Natl. Inst. Public Health*, 65:1, 2016.

[2] J. H. May and D. P. Strum and L. G. Vargas. Fitting the lognormal distribution to surgical procedure times. *Decision Sciences*, 31(1):129–148, 2000.

[3] M. A. Kamran and B. Karimi and N. Dellaert and E. Demeulemeester. Adaptive operating rooms planning and scheduling: A rolling horizon approach. *Operations Research for Health Care*, 22:100200, 2019.